Skriftlig Eksamen
Introduktion til lineær og heltalsprogrammering (DM515)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Tirsdag den 23 Juni 2009, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt. Det er ikke tilladt at anvende en computer. Eksamenssættet består af 5 opgaver på 7 nummererede sider (1–7). Fuld besvarelse er besvarelse af alle opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. **Husk at begrunde alle dine påstande!**. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og de øvrige noter fra pensum. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at den umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen (hvis dette altså er sandt!). I må gerne bruge metoder eller udvidelser af sætninger som er udledt i opgaver, der er stillet i løbet af kurset

Bemærk dog, at det ikke er tilladt at besvare et delspørgsmål, udelukkende med en henvisning til, at det følger af en af opgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over kursusmaterialet) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

OPGAVE 1 Relaksation, simplex metoden og det duale problem (20 %)

Betragt følgende heltalsprogrammeringsproblem (IP):

$$\begin{array}{lrr} \text{maximize} & 4x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_3 & \leq 5 \\ & x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & 2x_2 + x_3 & \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Spørgsmål a:

Opskriv LP relaksationen (P1) af (IP) og forklar hvorfor en optimal løsning til (P1) giver en øvre grænse for den optimale løsning til (IP).

Spørgsmål b:

Omskriv problemet (P1) til ligningsform (equational form) ved at tilføje slackvariable x_4, x_5, x_6, svarende til de tre begrænsninger (regnet oppefra) og opskriv det første simplex tableau med x_4, x_5, x_6 som basisløsning.

Spørgsmål c:

Argumenter for, at x_1 med fordel kan bringes ind i basisløsningen og udfør et pivot skridt som bringer x_1 ind i basisløsningen.

Spørgsmål d:

Efter endnu et pivot skridt, denne gang med x_2 som den indgående variabel (du skal ikke udføre dette skridt!), opnås følgende simplex tableau:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 & = & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 \\ x_6 & = & 7 - x_4 + 2x_5 \\ \hline z & = & 13 - x_4 - 2x_5 \end{array}$$

Argumenter for, at der er fundet en optimal løsning og angiv denne løsning samt dens objektfunktionsværdi.

Spørgsmål e:

Opskriv det duale problem til (P1), hvor du bruger tre duale variable y_1, y_2, y_3, svarende til hver af de tre første uligheder i (P1) taget oppefra.

Spørgsmål e:

Gør rede for, at $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ er en optimal løsning til det duale problem.

Spørgsmål f:

Som det fremgår af svaret i spørgsmål d er den fundne optimale løasning til (P1) ikke heltallig. Brug det sidste simplex tableau til at udlede følgende Gomory cut:

$$x_3 + x_4 \geq 1 \tag{1}$$

Forklar kort hvorfor (1) er en lovlig ulighed for (IP), medens tilføjelse af (1) til (P1) vil gøre den aktuelle optimale LP løsning ulovlig.

Spørgsmål g:

Brug (1) til at angive en optimal løsning til (IP1). Hint: dette kan gøres uden at lave nye (ikke trivielle) beregninger.

OPGAVE 2 Flows(20 %)

Lad $\mathcal{N}$ være netværket i Figur 1.

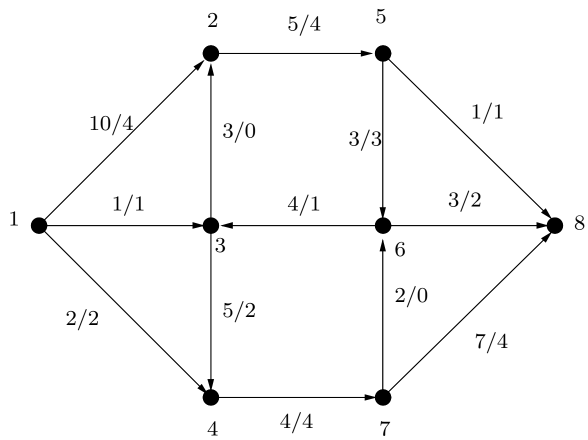

Figure 1: Et netværk $\mathcal{N}$ med kapaciteter u og et flow x som vist på hver kant i formatet u/x.

Spørgsmål a:

Gør rede for, at x er en lovlig (feasible) $(1,8)$-strøm og angiv dens værdi.

Spørgsmål b:

Dekomponer x i vej og kredsstrømme efter opskriften i afsnit 3.3 i Bang-Jensen og Gutins bog Digraphs. Du skal forklare hvordan du finder de enkelte komponenter i dekomponeringen.

Spørgsmål c:

Tegn residual netværket $\mathcal{N}(x)$ og forklar kort hvordan du finder kapaciteterne af kanterne i $\mathcal{N}(x)$ (det er nok at give et par eksempler).

Spørgsmål d:

Gør rede for, at x er en maksimum $(1,8)$-strøm i $\mathcal{N}$ og angiv et minimum $(1,8)$-snit som viser dette.

Spørgsmål e:

Antag nu, at alle kanter i $\mathcal{N}$ har omkostning 1. Gør rede for, at x ikke er en minimum omkostnings $(1,8)$-strøm af værdi $b_x(1)$ og angiv en ny $(1,8)$-strøm der har samme værdi, men er billigere. Du skal forklare hvordan man kan finde denne strøm ud fra $\mathcal{N}$ og x.

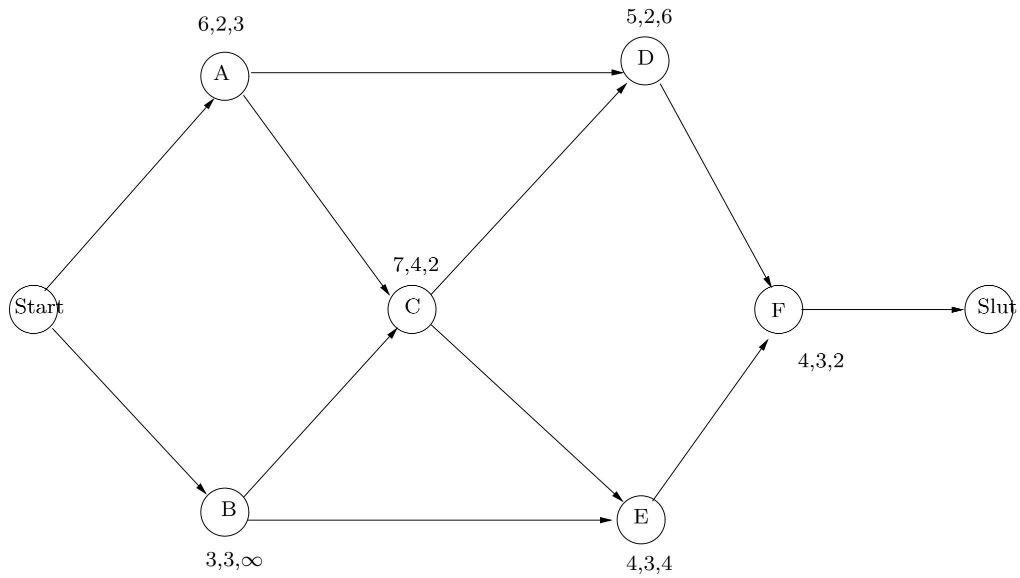

Figure 2: Et AON netværk for et lille projekt med 6 aktiviteter. Ved hver aktivitet er angivet: normaltid og minimumstid i uger, samt omkostning ved at afkorte tiden med 1 uge

OPGAVE 3 Formulering af LP problemer og projektskedulering (15 %)

Et lille projekt har 6 delaktiviteter A, B, C, D, E, F og den indbyrdes afhængighed (hvem der er er umiddelbar forgænger for hvem) er vist i Figur 2. Her fremgår også de enkelte aktiviteters normaltid, deres absolutte minimumstid, samt omkostning ved at afkorte tiden for delaktiviteten med 1 uge.

Spørgsmål a:

Find projektets normale varighed og dets absolut minimale varighed.

Spørgsmål b:

Vi ønsker nu at afkorte projektets varrighed til 18 uger. Opstil en LP formulering af dette problem og gør rede for, at denne er korrekt.

OPGAVE 4 Formulering IP problemer og cutting plane metoden(25 %)

En digraf $D = (V, A)$ er stærkt sammenhængende, hvis der for alle par af punkter $x, y \in V$ gælder, at D indeholder en ensrettet vej fra x til y og en ensrettet vej fra y til x. Dette er ækvivalent med at enhver ikke tom ægte delmængde X af V har mindst en kant ud af sig (dvs en kant ij hvor $i \in X$ og $j \notin X$). MSSS[1] problemet er som følger: Givet en stærkt sammenhængende digraf $D = (V, A)$; find en udspændende[2] delgraf $D' = (V, A')$ af D, så D' også er stærkt sammenhængende og har så få kanter som muligt.

Spørgsmål a:

Formuler MSSS problemet som et heltalsprogrammeringsproblem. Du skal redegøre for at din formulering er korrekt.

Spørgsmål b:

Beskriv kort hvordan man kan bruge flows til at finde en mindste mændge af kanter $A'' \subseteq A$ fra en stærkt sammenhængende digraf $D = (V, A)$ så $d^-_{A''}(v) \geq 1$ og $d^+_{A''}(v) \geq 1$ for alle $v \in V$. Her er $d^-_{A''}(v)$ ($d^+_{A''}(v)$) antallet af kanter fra A'' som går ind i (ud fra) v. Hint: sammenlign med afsnit 3.11.3 i Bang-Jensen og Gutins bog Digraphs. Forklar først hvordan man finder en lovlig mængde og derefter, hvordan man så finder en der er mindst mulig.

Spørgsmål c:

Gør kort rede for, hvordan man kunne løse LP-relaksationen af MSSS problemet ved hjælp af en cutting plane metode. Du skal gøre rede for, hvordan man, ved hjælp af flows, kan checke om den aktuelle LP-løsning overholder alle de oprindelige uligheder, samt beskrive hvad man gør hvis den ikke overholder dem alle sammen. Hint: Du kan foreksempel tilføje de redundante uligheder der udtrykker, at ethvert punkt $i \in V$ skal have mindst en kant ud fra sig og mindst en kant ind til sig i D' og starte med kun disse uligheder.

Spørgsmål d:

Giv et eksempel som viser, at den optimale løsning til LP-relaksationen af MSSS problemet ikke behøver være heltallig og forklar kort hvordan man kan komme videre (mod en optimal heltalsløsning) i dette tilfælde.

[1] Minimum Spanning Strong Subdigraph
[2] dvs den indeholder alle punkterne fra D

OPGAVE 5 Branch and Bound (20 %)

Betragt instansen af TSP med 5 punkter og 10 kanter som vist i Figur 3. Turen $T = 135241$ har omkostning 17 og bruges som start løsning nedenfor.

Spørgsmål a:

Find et optimalt 1-træ, når knude 1 bruges som det specielle punkt. Hvilken nedre grænse giver dette for længden af en optimal TSP tur?

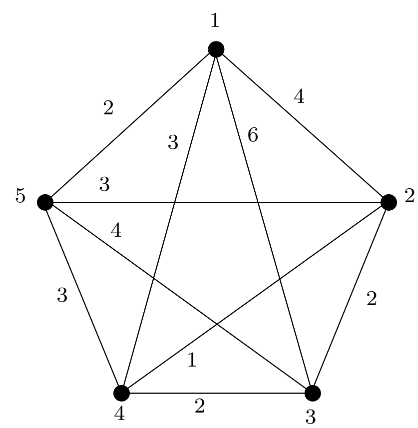

Figure 3: En TSP instans

Spørgsmål b:

Løs TSP problemet fra Figur 3 til optimalitet ved hjælp af branch and bound, hvor du bruger 1-træer som nedre grænse (det er altid knude 1 der er den specielle knude) og starter med turen T som en kendt øvre grænse. Forgreningen i branch and bound træet skal foretages ved at udelukke kanter ved et udvalgt punkt som er endepunkt for mindst 3 kanter i 1-træet. **Ved det første 1-træ skal du forgrene ud fra kanterne som er incidente med punkt 4**. Du skal også beregne den nedre grænse for alle de nye knuder i branch and bound træet, så snart du laver dem og bruge disse til at begrænse antallet af delproblemer du fortsætter med. Husk, at du skal vælge lovlige 1-træer i hvert skridt. Hvis der er flere muligheder må du gerne vælge et sådant som giver dig bedst mulig information.

Forklar kort (med begrundelser) hvad du konkluderer i de enkelte skridt, hvilke knuder i branch and bound træet du er nød til at forsætte fra (branche) og hvilke du kan afslutte.