OPGAVE TIL CARDANO, ARS MAGNA

1. Læs Cardanos tekst frem til s. 171.

2. Indse at GH=AB er den søgte Løsning til ligningen, at cub(AE) - cub(CL) = 20, at AC·CK = 2.

3. Indsæt GH = AC - BC i ligningen, brug betingelserne fra 2 til at se, at ligningen er opfyldt.
(Cardanos måde er noget mere omstændelig!)

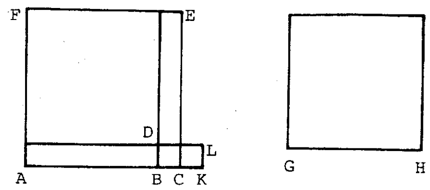
VII.3. Uddrag af Cardanos Ars Magna

Kapitel 11. Om en kube og ting[1] lig med et tal.

Scipio Ferro fra Bologna opdagede reglen i dette kapitel for omkring 30 år siden. Han gav den videre til Antonio Mario Fiore fra Venezia, der engang kom i dyst med Niccolo Tartaglia fra Brescia og gav anledning til, at Niccolo også opdagede den. På vores opfordring gav Niccolo den til os, men holdt beviset for sig selv. Udstyret med denne hjælp gav vi os til at lede efter beviset og blev ført til det — således som vi viser i det følgende — gennem en proces, der var svær.

Bevis

Lad for eksempel kuben på GH og et seksfold af siden GH være lig med 20.[2] Jeg tager to kuber AE og CL [jvf. figur VII.3], hvis differens er 20, således at produktet af siden AC og siden CK er 2, nemlig en tredjedel af antallet af ting. Jeg afskærer CB lig med CK og siger, at når der er gjort således, vil det resterende liniestykke



Figur VII.3.

AB være lig med GH og derfor lig med den ting, der skal bestemmes, thi GH var jo netop antaget at være den.

I overensstemmelse med den første sætning i sjette kapitel af denne bog[3] fuldender jeg legemerne DA, DE og DF, således at vi med DC forstår kuben på BC, med DF kuben på AB, med DA et trefold af CB på kvadratet på AB og med DE et trefold af AB på kvadratet på BC.

Da AC på CK udgør 2, vil AC på tre CK udgøre 6, antallet af ting, og således vil AB på et trefold af AC på CK være 6 ting AB, eller et seksfold af AB, hvorfor et trefold af produktet af AB, BC og AC er et seksfold af AB.

Nu er differensen mellem kuben på AC og kuben på CK og følgelig også kuben på BC, der ifølge antagelsen er lig med den, 20. Ifølge den første sætning af sjette kapitel er denne [differens] lig med legemerne DA, DE og DF,[4] således er disse tre legemer tilsammen 20.

Hvis BC sættes til *m*,[5] så vil, som det er vist dér, kuben på AB være lig med kuben på AC, et trefold af AC på kvadratet på CB, kuben på BC *m* og et trefold af BC på kvadratet på AC *m*.[6] Men differensen mellem et trefold af BC på kvadratet på AC og et trefold af AC på kvadratet på BC er [et trefold af] produktet af AB, BC og AC; dette er imidlertid — sådan som det er blevet vist — lig med et seksfold af AB. Derfor vil en addition af et seksfold af AB til det, som kommer af AC og kvadratet på BC tre, give et trefold af BC på kvadratet på AC. Da nu BC er *m*, er det klart, at produktet af CB og kvadratet på AC tre er *m*, og resten, som er lig med det, er *p*.[7] Således vil et trefold af CB på kvadratet på AB [læs AC], et trefold af AC på kvadratet på CB sammen med et seksfold af AB intet udgøre.[8]

Det følger så ved sjælens almindelige fornuft, at differensen mellem kuben på AC og kuben på BC er lige så meget som kuben på AC, et trefold af AC på kvadratet på CB, et trefold af CB på kvadratet på AC *m*, kuben på BC *m* og et seksfold af AB, dette er således 20, idet differensen mellem kuben på AC og kuben på CB er 20.

Ifølge anden sætning i 6. kapitel[6] vil endvidere, når BC antages *m*, kuben på AB være lig med kuben på AC, et trefold af AC på kvadratet på BC, kuben på BC *m* og et trefold af BC på kvadratet på AC *m*. Kuben på AB sammen med et seksfold af AB vil da — idet de tilsammen er lig med kuben på AC, et trefold af AC på kvadratet på CB, et trefold af CB på kvadratet på AC *m*, kuben på CB *m* og et seksfold af AB, der netop er vist at være 20 — ifølge sjælens almindelige fornuft også være lig med 20.[9]

Når således kuben på AB og et seksfold af AB er lig med 20, og kuben på GH og et seksfold af GH er lig med 20, så vil ifølge sjælens almindelige fornuft og det, der er vist i den 35. og 31. [sætning] af den elvte af Elementerne, GH være lig med AB,[10] således er GH differensen mellem AC og CB. Da AC og CB, eller AC og CK er tal eller liniestykker, der indeholder en flade, som er lig med en tredjedel af antallet af ting, medens kuberne adskiller sig ved ligningens tal, har vi følgende

Regel.[11]

Opløft en tredjedel af antallet af ting til en kube[12], til hvilket du adderer kvadratet på halvdelen af ligningens tal, af det hele uddrager du roden, dvs. kvadratroden, som du tager to af. Til den første adderer du halvdelen af tallet — som var blevet ganget med sig selv — fra den anden trækker du den samme halvdel. Du vil da have et binomium og dets apotom[13], træk så kubikroden af apotomet fra kubikroden af dets binomium, den rest der kommer ud af det, er tingen der skulle bestemmes.

Eksempel.

Kuben og 6 positioner[14] er lig med 20. Opløft 2, en tredjedel af 6, til kube, det er 8, gang 10, halvdelen af tallet, med sig selv, det er 100, foren 100 og 8, det giver 108, uddrag roden som er R_x 108 [$\sqrt{108}$][15], tag to af den.
Adder til den første 10, halvdelen af tallet, og træk fra den anden lige så meget, så har du binomiet R_x 108 p 10 og apotomet R_x 108 m 10, af hvilke du tager R_x — kube — og træk den som hører til apotomet fra den der hører til binomiet, så har du tingen, der skulle bestemmes.

R_x v. kube R_x 108 p. 10 m. R_x v. kube R_x 108 m. 10 [$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$].

kube p. 6 ting lig 20
2 20
8 ___ 10
108
R_x 108 p. 10
R_x 108 m. 10
R_x v. kube R_x 108 p. 10
R_x v. kube R_x 108 m. 10.

[Oversat fra Cardano 1545, pp. 29-30.]

VII.4. Opgaver til kapitel 11 af Ars Magna

Opgave VII.1

i) Vis, at Cardanos løsningsprocedure for ligningen

$$x^3 + bx = c \qquad b > 0,\ c > 0 \tag{1}$$

svarer til at finde en rod på formen

$$x = u - v, \tag{2}$$

hvor

$$u^3 - v^3 = c \quad \text{og} \quad uv = \frac{1}{3}b. \tag{3}$$

ii) Det vides ikke, hvorledes Cardano eller hans forgængere har fundet på proceduren beskrevet i i). Men det er sandsynligt, at den er fremkommet ved hjælp af en idé, der i algebraisk notation tager sig således ud: For at få 'hul' på ligning (1) prøver vi at sætte $x = u - v$; derved opnår vi (eftervis dette) ligningen

$$(u^3 - v^3) + b(u - v) = c + 3uv(u - v).$$

Brug denne ligning til at indse, at man får en løsning ($x = u - v$), hvis man sætter $u^3 - v^3 = c$ og $3uv = b$.

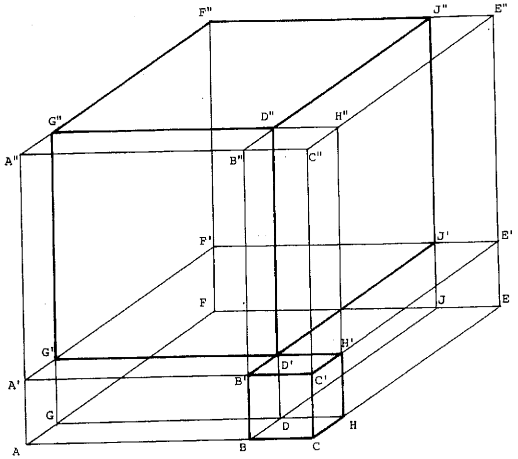
iii) Find løsningerne u, v til (3) og vis, at de indsat i (2) giver

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}\,. \tag{4}$$

I kapitel 11 af Ars magna betragter Cardano to ligninger mere end den, der er gengivet i teksten. Disse ligninger svarer til

3. Sætningen, Cardano refererer til, udtrykker den relation, der algebraisk skrives således

$$AC^3 = (AB + BC)^3 = AB^3 + 3AB^2 \cdot BC + 3AB \cdot BC^2 + BC^3. \quad (*)$$



Figur VII.8. Terning delt i to terninger og seks kasser; de sidste består af to sæt af indbyrdes lige store kasser.

Denne sætning kan indses geometrisk (figur VII.8): I terningen AE" er BC = CH = HH'; der gælder da, at

terning AE" = kasse AD' + terning BH' + kasse DE'
+ kasse GJ' + kasse A'D" + kasse B'H"
+ kasse D'E" + terning G'J".

Det vil sige

kube(AC) = kasse(AB,□BC) + kube(BC) + kasse(AB,□BC)
+ kasse(□AB,BC) + kasse(□AB,BC) + kasse(AB,□BC)
+ kasse(□AB,BC) + kube(AB),

eller

kube(AC) = kube(AB) + 3kasse(AB,□BC) + 3kasse(□AB,BC)
+ kube(BC).

Cardano tegner ikke sætningen tredimensionalt, men projicerer så at sige terningen ned i bundkvadratet (figur VII.3). Han lader således kvadratet AE repræsentere hele terningen, kvadratet DC repræsenter kube(BC), kvadratet DF repræsentere kube(AB), rektanglet DA repræsentere 3kasse(□AB, BC) og endelig rektanglet DE repræsentere 3kasse(AB,□CB).

Selv om Cardano gør meget ud af (*), er det slet ikke den relation, han har brug for i sine videre regninger, men derimod (**) i note 6.

4. Her refererer Cardano til (*) i note 3 på formen

$$AC^3 - BC^3 = AB^3 + 3AB^2BC + 3AB \cdot BC^2.$$

Heller ikke denne relation bruger han i sine senere udregninger. Det er iøvrigt typisk for Cardanos forfatterskab, at han ofte undlader at slette overflødige betragtninger.

5. *m* er en forkortelse af *minus* : noget der skal trækkes fra.

6. Her kommer den væsentlige relation for regningerne, første gang uden eksplicit reference og anden gang med en henvisning til, hvor i Ars magna den kan findes. Algebraisk kan relationen udtrykkes således

$$AB^3 = (AC - BC)^3 = AC^3 - 3AC^2BC + 3AC \cdot BC^2 - BC^3. (**)$$