4-1

INSTITUT FOR DE EKSAKTE NATURVIDENSKABERS HISTORIE
AARHUS UNIVERSITET, NY MUNKEGADE, DK-8000 ÅRHUS C

TRÆK AF DEN MATEMATISKE ANALYSES UDVIKLING I 1600-TALLET.

Kirsti Møller Pedersen

4-2

Indholdsfortegnelse

Forord

Disse noter er en revideret udgave af tidligere forelæsningsnoter benyttet i forbindelse med et kursus i videnskabshistorie ved Institut for de eksakte videnskabers historie. Den del, der dækker perioden op til Newton og Leibniz, ligger tæt op ad mit kapitel "Techniques of the Calculus 1630-1660" i I. Grattan-Guinness (ed.), *From the calculus to the set theory 1630-1910*, der er planlagt til at udkomme i 1978.

1. Indledning

Det 17. århundrede er en betydningsfuld periode i den matematiske analyses historie, idet analysen i løbet af dette tidsrum udviklede sig fra at bestå af specielle metoder henimod at blive en generel teori. Isaac Newton* og Wilhelm Gottfried Leibniz bidrog væsentligt til denne udvikling, og de betegnes da også ofte som analysens grundlæggere. Man skal dog ikke vente hos dem at finde analysen udformet på en sådan måde, at en moderne matematiker vil acceptere den som en velfunderet teori. Newtons og Leibniz' store fortjeneste er, at de var i stand til at gennemskue det essentielle i tidligere metoder og knytte det sammen til en almen teori. Det var i den forbindelse væsentligt, at det lykkedes dem at udvikle en notation, der gjorde det muligt at beskrive en generel situation. Leibniz' notation var så velegnet, at den stadig bruges - 200 år efter dens indførelse.

Newton og Leibniz var også de første. der eksplicit gjorde den fundamentale iagttagelse (Newton 1665 og Leibniz 1675), at differentiation og integration er modsatte processer. Der findes fra tiden før Newton og Leibniz adskillige eksempler, der i oversættelse til vort nuværende matematiske sprog viser den omvendte sammenhæng mellem differential- og integralregning men alle eksemplerne er knyttede til specielle problemer og vidner ikke om en fuld erkendelse af sammenhængen.

Da Newton og Leibniz hentede megen inspiration i de ideer, der lå bag de tidligere infinitesimale metoder, ville det være unaturligt at begynde analysens historie med Newton og Leibniz. Derimod er tidspunktet omkring 1630 et naturligt udgangspunkt, fordi det var i perioden herefter, at mange af de frugtbare ideer så dagens lys. Netop fordi ideerne bar frugt, gik de metoder, de var knyttede til, i glemsel; jeg vil derfor her lægge størst vægt på ideerne i metoderne og til illustration benytte simple eksempler. Dette bevirker, at billedet af matematikernes præstationer bliver noget fortegnet, men en gengivelse af de vanskeligere eksempler ville resultere i lange udregninger, der let tilslører ideerne. Det volder ingen vanskeligheder at finde simple eksempler, fordi periodens matematikere, efter at have præsenteret deres metoder, viste, at når man anvendte dem på simple problemer, fik man de kendte resultater. Dernæst benyttede de metoderne til at finde nye resultater med.

Emnet, infinitesimale metoder i perioden 1630-1660, er for stort til, at det kan behandles til bunds inden for rammerne af disse noter. Jeg har

* Bagest i noterne findes en fortegnelse over nævnte matematikere samt en bibliografi.

valgt at omtale forholdsvis få metoder og gøre det i nogen detalje. Det betyder, at mange betydningsfulde matematikeres bidrag til analysen ikke vil blive berørt, disse kan findes i den righoldige litteratur om emnet (se f.eks. Baron [1], Boyer [1] og Whiteside [1] og deres bibliografier). Ved udvælgelsen blandt de forskellige metoder har jeg især lagt vægt på, at redegøre for få centrale emner og belyse hvor forskelligt de blev grebet an, samtidig med at præsentere de ideer, der inspirerede senere matematiker

I behandlingen af analysens historie i sidste tredjedel af det 17. århundrede vil jeg begrænse mig til at søge sporene, der førte Newton frem ti fluxionsregningen og Leibniz til integral- og differentialregningen, og kort skitsere disse teoriers videre udvikling.

Der er naturligvis også en forhistorie til hvad der skete i analysen i dekaderne efter 1630. Ud over at søge denne i den umiddelbart foregående periode, skal man også se på den klassiske græske matematik (fra århundredet efter 300 f.Kr.). Årsagen til, at sidstnævnte havde indflydelse på matematikerne, der beskæftigede sig med analyse i begyndelsen af det 17. århundrede, var at den indtog en stor plads i deres matematiske uddannelse. Der var nemlig ikke senere skabt matematiske arbejder, der overgik den græske matematik - endsige kom på højde med den. Den græske matematik undgik behændigt infinitesimale betragtninger og blev meget beundret for dens høje grad af eksakthed; men dens metoder var ikke heuristiske, idet de ikke var velegnede til at give ideer til, hvorledes man skulle løse nye problemer. (Dette vil jeg senere illustrere i forbindelse med omtale af areal- og volumenbestemmelser). Det blev derfor naturligt for matematikerne at søge efter andre metoder, der gav mulighed for at angribe problemerne mere direkte. Kimen til sådanne metoder finder man i slutningen af 1500- og begyndelsen af 1600-tallet, der i det hele taget var en frugtbar periode i de eksakte videnskabers historie.

Inden for astronomien blev der gjort store fremskridt med Johann Keplers arbejder. Til statikken ydede den hollandske matematiker og fysiker Simon Stevin et væsentligt bidrag med afhandlingen *De Beghinsel der Weegh-const* (1586). For mekanikken betød Galileo Galileis udledelse af faldloven og bestemmelse af den parabolske projektilbane et brud med den aristoteliske fysik og begyndelsen til en ny epoke, hvor matematikken spillede en væsentlig rolle i fysikken.

Alle tre videnskabsmænd anvendte infinitesimale betragtninger i deres arbejder; Stevin sikrede sig lovligheden af disse ved at føre sine beviser i den græske stil. Kepler derimod løsrev sig fra de græske beviser og byggede på en intuitiv opfattelse af area er og volumener. Han betragtede f.eks. en kugle som værende sammensat af uendeligt mange kegler med toppunkt i centrum og basis på kuglens overflade. Dette førte ham til det resultat, at en kugle i volumen er lig med en kegle, hvis højde er lig med kuglens radius og hvis basis er en cirkel, der i areal er lig med kuglens overflade (Kepler [1], 1. del sætning 11). Galilei gav sine kolleger indtryk af, at han ville skrive en bog om indivisible størrelser og deres sammenhæng med kontinuet, men han udførte aldrig dette projekt; hans ideer havde imidlertid stor indflydelse på Bonaventura Cavalieri, der var den første, der publicerede en alternativ metode til den græske til bestemmels af arealer.

2. Matematikerne og deres miljø

Matematikkens udvikling er præget af, at der pludselig dukker en stor matematiker op, som regel et sted, der i forvejen er inde i en økonomisk og kulturel fremgang. Han vil så sætte sine spor ved at inspirere andre enten ved et direkte lærer-elev forhold, eller gennem sin skriftlige produktion. Ofte vil denne udvikling bevirke, at der for en tid opstår matematiske centre. I 1600-tallet var det først Norditalien, der var det matematiske centrum, der i analysen særlig var præget af to fra kredsen omkring Galilei, nemlig den allerede omtalte Cavalieri og Evangelista Torricelli. Cavalieri blev i 1629 professor i matematik i Bologna, Torricelli fandt også sit arbejde inden for matematikken, efter at have været assistent hos Galilei ove tog han i 1642 dennes stilling som 'hof'matematiker hos hertugen af Toscan Efter 1647, hvor både Cavalieri og Torricelli døde, fandtes der for en tid ikke længere italienere blandt de førende matematikere.

Centret var da rykket til Frankrig, hvor de, der kom til at være de toneangivende, var Pierre de Fermat, René Descartes, Gilles Personne de Roberval og Blaise Pascal. De tre første startede med at være matematisk aktive i begyndelsen af 1630'erne, medens Pascals matematiske produktion begyndte omkring 1640. Roberval var den eneste af dem, der var profession matematiker, Fermat levede af at være jurist; Descartes og Pascal var uafhængige af arbejdsindtægter, begge er de forøvrigt bedre kendte som filoso fer end som matematikere og fysikere.

Descartes tilbragte en stor del af sin tid i Holland og har givetvis haft en positiv betydning for det derværende matematiske miljø, som voksede op omkring matematikprofessoren i Leiden, Frans van Schooten. Han og hans elever kom til at spille en stor rolle i formidlingen af Descartes matematiske hovedværk, *La géométrie* (1637), bl.a. ved at de oversatte det til latin og skrev kommentarer til det. De fleste af van Schootens elever fan deres virke uden for matematikken, f.eks. var Johann Hudde beskæftiget in for administrationen af Amsterdam, bl.a. som borgmester. Den kendteste af van Schootens elever var Christiaan Huygens, der i 1666 blev den første p sident for *l'Académie des Sciences* i Paris.

Fra 1650'erne begynder de engelske matematikere at gøre sig gældende. I kendteste før Newton er Isaac Barrow og John Wallis, der var matematikprofessorer i henholdsvis Cambridge og Oxford, Barrow dog kun for en kort tid. Barrows hovedinteresse var teologien, og i 1669 overlod han sit professorat til den lovende elev Newton.

Bortset fra Leibniz finder man ingen virkelige betydningsfulde tyske matematikere. Leibniz, der var uddannet som jurist, hentede også sin matematiske inspiration uden for Tyskland, nemlig i Paris. Der opholdt han sig i årene 1672-1676 og kom i nær kontakt med Huygens, som fik stor indflydel på hans matematiske undersøgelser. Selv om Leibniz blev en af tidens størs matematikere, blev han aldrig matematiker af profession.

Leibniz' arbejder inden for differential- og integralregningen, der ble offentliggjort i 1680'erne, fik en speciel god modtagelse af de svejtsiske brødre Jakob og Johann Bernoulli, og disse var i høj grad medvirkende ved etableringen af den nye disciplin. Jakob var professor i matematik i Basel og Johann i Groningen, indtil han overtog broderens professorat efter dennes død i 1705.

Kontakten mellem de forskellige matematikere, der i deres daglige arbejde var ret isolerede, foregik i begrænset omfang ved besøg og i stor udstrækning gennem breve. Vi er så heldige, at vi har en meget stor del af tidens videnskabelige korrespondance bevaret, og den viser os tydeligt, at vi i den finder en vigtig kilde til spredning af information og inspiration. Franskmanden Marin Mersenne spillede indtil sin død i 1648 en vigtig rolle som formidler af kontakt mellem forskellige matematikere.

Senere blev denne formidlingsopgave institutionaliseret ved oprettelse af akademier, der både optog lokale og korresponderende medlemmer. Således oprettedes Royal Society i 1665, l'Académie des Sciences året efter, og disse blev forbillede for flere akademier rundt om i Europa. Gennem akademiernes skrifter fik man mulighed for at få offentliggjort korte afhandlinger (tidsskrifter havde ikke tidligere eksisteret), og dette er klart af betydning for spredning af viden. Blandt akademiskrifterne spillede især det fra Leipzig, *Acta Eruditorum* (*Lipsiensae*), der startede i 1682, en rolle for udbredelse af kendskabet til differentialregningen.

Antallet af matematikbøger fra 1600-tallet er ikke overvældende. Dett skyldes dels en tilbageholdenhed fra forlæggernes side, og dels at matematikerne selv var tilbageholdende med at publicere en detaljeret beskrivels af deres metoder. Der er nok flere grunde til det sidste, bl.a. en erkendelse af, at en brugbar metode hvilede på et spinkelt fundament; det har nok også spillet en rolle, at det for nogle af periodens matematikere var væsentligt at kunne brillere med deres resultater, og de ønskede derfor ikke, at deres konkurrenter skulle komme i besiddelse af det middel, hvormed resultaterne var fundet.

I løbet af dette århundrede er der blevet trykt en meget stor del af de papirer, 1600-tallets matematikere efterlod sig; men der findes stadig en stor samling uudgivne manuskripter, bl.a. af Leibniz.

3. Kurver og undersøgelser af dem

I slutningen af 1600-tallet dukker funktionsbegrebet op, og det første værk, der gør det centralt i den matematiske analyse, er Leonhard Eulers *Introductio* fra 1748. Inden den tid er analysen knyttet til kurveundersøgelser. De kurver, matematikerne kendte og beskæftigede sig med, var først dem, de havde arvet fra grækerne (keglesnittene, Hippias' kvadratrice, Archimedes' spiral, Nikomedes' konkoide og Diokles' kissoide). Som det 17. århundrede skred frem, dukkede der en lang række nye kurver op, nogle var generaliseringer af de kendte, andre udsprang af fysiske problemer.

I afhandlingen *La géométrie* (1637) delte Descartes alle kurver op i to klasser, de geometriske og de mekaniske; betegnelserne blev senere af Leibniz ændret til de stadig brugte, algebraiske og transcendente (algebraiske kurver er karakteriseret ved, at deres ligning kan skrives på formen $p(x,y) = 0$, hvor p er et polynomium i x og y). Descartes mente, at det kun var de geometriske (algebraiske) kurver, der havde en plads i matematikken Denne anskuelse vandt ikke almindelig tilslutning; men de transcendente kurver kom alligevel til at indtage en særstilling, fordi man ikke til dem havde knyttet ligninger, man kunne bruge i beregninger. Vi skal senere se, at de fleste af de metoder, der udvikledes i 1600-tallet, kun var direkte anvendelige for algebraiske kurver. Et middel til at behandle transcendent kurver blev udviklinger i uendelige rækker, der tog sin begyndelse i 1660'erne. En af de første rækkeudviklinger var $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ Mærkeligt nok optræder logaritmen først relativt sent i århundredet blandt de transcendente kurver, selv om logaritmer havde været kendt og flittigt benyttet siden 1614. Det skyldes, at man i lang tid kun opfattede logaritm som forbindelser mellem kvotient- og differensrækker. (Torricelli havde ganske vist i 1647 betragtet logaritmen som en kurve, men hans arbejde var ikke kendt).

En af de transcendente kurver, der fik matematikernes største bevågen hed, var cycloiden. Den fremkommer, når man lader en cirkel rulle på en vandret linie og følger bevægelsen af et af cirklens punkter (f.eks. beskr ver ventilen på et jævnt rullende cykelhjul en cycloide). Cycloiden var genstand for de første undersøgelser i 1630'erne, hvor man fik bestemt den tangenter og arealet begrænset af kurven og abscisseaksen. I 1658 udskrev Pascal en konkurrence, hvor han opfordrede sine kolleger til at bestemme arealet af et cycloideudsnit, dettes tyngdepunkt, volumenet fremkommet ved at dreje arealet om en akse, og tyngdepunktet for dette volumen. Pascal modtog ud over svar på de stillede spørgsmål et resultat, han ikke havde bedt om, nemlig en bestemmelse af cycloidens buelængde. Denne, der er et af de første eksempler på rektifikation, blev sendt af englænderen Christopher Wren - bedst kendt som arkitekt.

De nævnte undersøgelser vedrørende cycloiden giver et næsten fuldstændigt billede af hvilken type analytiske problemer matematikerne beskæftige sig med op til omkring 1660. Blandt hovedemnerne mangler kun bestemmelse af ekstremaer. Der findes endvidere enkelte eksempler på, at man løser en såkaldt omvendt tangentopgave (dvs. at bestemme en kurve, hvis tangent har en given egenskab); men først i 1690'erne findes der mange af den type opgaver, de bliver da udtrykt ved en differentialligning.

Det er naturligt at spørge om, hvorfra matematikerne fik inspiration til i så høj grad at beskæftige sig med areal-, volumen-, tyngdepunkts-, ekstremums- og tangentbestemmelser. Man ville måske vente, at inspirationen var at finde i den føromtalte matematiske behandling af fysik og astronomi. Men medens der er eksempler på, at kurver dukker op fra fysikken (f.eks. kædelinien), har det ikke været mig muligt at finde et eksempel fra fysikken eller astronomien, der klart leder frem til ovennævnte opgave Derfor er jeg af den opfattelse, at arbejdet med dem skal ses som en videre førelse af den græske matematik, hvor der findes eksempler på alle opgaverne. Det betyder ikke, at der ingen forbindelse var mellem matematik og fysik; det var der om ikke andet af den grund, at de fleste store fysikere også var store matematikere. Blot er det ikke muligt entydigt at pege på fysiske problemer, der direkte sætter sig spor i den matematiske analyse før slutningen af 1650'erne. På det tidspunkt dukkede der et nyt matematisk emne op, som udsprang fra fysikken, nemlig studiet af evoluter, der started med Huygens' undersøgelser af pendulbevægelser.

Newtons fluxionsregning og Leibniz' differential- og integralregning var inspirerede af de metoder, der var udviklede til bestemmelse af arealer og tangenter, og må altså også ses som opstået uden direkte tilknytning til fysikken - igen har det ikke været muligt at finde fysiske eksempler, der leder hen mod disse discipliner, fra perioden omkring deres opdukken. Først da differentialregningen er etableret omkring 1690 finder der en kraftig vekselvirkning mellem fysik og matematik sted, således får studiet af differentialligninger mange impulser fra fysikken.

4. Descartes' notation

I dette afsnit vil jeg kort omtale udviklingen af notationen i den analytiske geometri. Selv om denne ikke har nogen direkte tilknytning til differential- og integralregningen, er der efter min mening ingen tvivl om, at det virkede stimulerende på infinitesimalregningen, at den blev forsynet med det gode redskab, som Descartes' notation var.

Geometrien dannede fundament for den klassiske græske matematik, bortset fra talteorien, og udtryksmåden var ren verbal. I tidens løb blev teorien for ligninger (algebraen) delvist løsrevet fra geometrien, og der udvikledes en del algebraisk symbolik, såsom symboler for de ukendte størrelser, potenser af disse, addition og subtraktion. Et vigtigt bidrag til behandling af ligninger blev ydet af den franske matematiker (og jurist) François Viète, der i et arbejde fra 1591 indførte symboler også for de kendte koefficienter til de ukendte størrelser i ligninger.

Viète forbandt også algebraen og geometrien ved i nogle tilfælde at knytte en ligning til en geometrisk konstruktion, dog kun til sådanne, der førte til en ligning med én ubekendt. Det næste skridt var at benytte en ligning i to ubekendte til at beskrive problemer om geometriske steder. Dette skridt blev taget uafhængigt og næsten samtidigt af Fermat og Descartes. Fermats resultater kom ikke til at få nogen indflydelse på udviklingen, idet de var ret ukendte og helt blev overskygget af Descartes', der blev offentliggjort i *La géométrie* i 1637.

Den notation, Descartes indførte dér, virker ikke overraskende på en moderne matematiker, fordi den indeholder grundelementerne til den, han benytter sig af ved behandling af ligninger og i den analytiske geometri. Men for samtiden var den revolutionerende. Descartes starter *La géométrie* med at konstatere, at hvis man vælger et enhedsliniestykke, kan man opnå en korrespondance mellem de algebraiske operationer +, −, ·, :, $\sqrt{\ }$ og geometriske konstruktioner. Det nye i Descartes' synsmåde er, at medens man tidligere havde opfattet $a \cdot b$ som et rektangel, når a og b er liniestykker, så kan Descartes opfatte $a \cdot b$ som et liniestykke, nemlig det, der konstrueres som det fjerde proportionale til enhedsliniestykket og liniestykkerne a og b. Tilsvarende er det muligt at opfatte $a : b$ og $\sqrt{a}$ som et liniestykke.

Den korrespondance, Descartes etablerede, fik konsekvenser for både geometrien og algebraen. Geometrien blev "analytisk" (dvs. algebraisk). Descartes indførte den i dag så naturlige konvention at benytte alfabetets første bogstaver til at betegne kendte liniestykker og dets sidste bogstave til ukendte; endvidere indførte han betegnelser som x^3, x^4 etc. (x^2 skriver han dog oftest som $x \cdot x$); endelig indførte han et koordinatsystem (ikke nødvendigvis retvinklet og orienteret) og fik derved knyttet en ubestemt ligning i to ubekendte til en algebraisk kurve.

Konsekvenserne for algebraen er knap så åbenbare, men dog betydningsfulde. De drejer sig om strukturen af det tallegeme, man byggede på. Tallen bestod på det tidspunkt egentlig kun af de rationale tal, dog ville ingen matematiker betvivle, at en ligning som $x^2 = 2$ havde en rod; den kaldte man $\sqrt{2}$ og var i stand til at approximere den med rationale tal. Men skulle man stringent bevise sætninger om løsninger til ligninger, måtte disse udformes geometrisk, idet man i geometrien havde det grundlag, man på grund af det ufuldstændige talsystem savnede i algebraen. Descartes viste én gang for alle, at de algebraiske operationer er meningsfyldte i geometrien, og kan kan så tillade sig at bruge algebraiske argumenter i beviserne. Man kan sige, at algebraen og analysen som grundlag fik et 'tal'legeme, der blev repræsenteret ved den rette linie, og det beholdt den længe. En egentlig konstruktion af de reelle tal fandt først sted omkring 1870.

5. Descartes' normalmetode og Huddes regel

Den betydning, Descartes selv har tillagt sin normalmetode, fremgår af hans indledende bemærkninger til den i *La géométrie:*

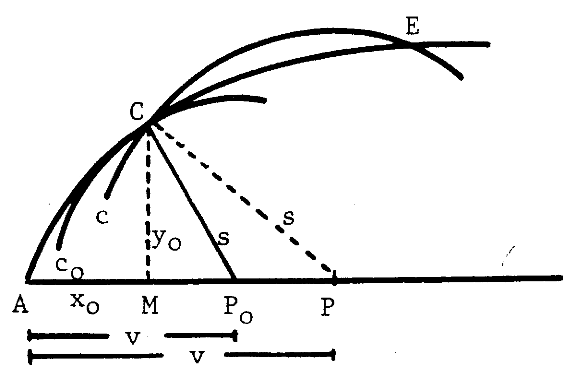
> Jeg tør sige, at dette [at kunne bestemme normaler til en kurve] ikke alene er det nyttigste og mest generelle problem, jeg kender, det er tillige det jeg mest har ønsket at forstå i geometrien.
>
> [*La géométrie*, p. 342]

4-12

Descartes præsenterer dernæst de tanker, der ligger til grund for metoden, samtidig med at han regner på nogle eksempler. Jeg vil for overskuelighede skyld tillade mig den anakronisme at tænke mig kurvens ligning givet på formen

$$y = f(x) \tag{5.1}$$

Figur 1



Lad kurven være ACE, vi ønsker at bestemme normalen til kurven i punktet C hvor $AM = x_o$ og $CM = y_o$ (i Descartes' egen notation er der altid byttet om på x og y). Lad P være et vilkårligt punkt på aksen AM, og lad

$$AP = v, \qquad CP = s.$$

Descartes betragter cirklen c med centrum i P og radius CP, den har lignin gen

$$y^2 + (v-x)^2 = s^2. \tag{5.2}$$

Af (5.1) og (5.2) får vi, at abscisserne til fællespunkterne for kurven AC og cirklen c vil være løsninger til ligningen

$$f^2(x) + (v-x)^2 - s^2 = 0. \tag{5.3}$$

Descartes gør nu følgende iagttagelse: Hvis CP_o er normal til kurven vil virklen c_o, med centrum i P_o, tangere, men ikke skære kurven i C. Derimod vil cirklen c med centrum i $P \neq P_o$ skære kurven, og deraf følger, at udover C har et punkt E fælles med kurven; dvs. ligningen (5.3) har to forskellige rødder.

> "... men jo tættere de to punkter [C og E] er på hinanden, desto mindre er differensen mellem de to rødder, og til sidst er de helt ens, når de to punkter falder sammen, dvs. når den cirkel, der går gennem C, tangerer kurven uden at skære den." (*La géométrie*, pp. 346-347).

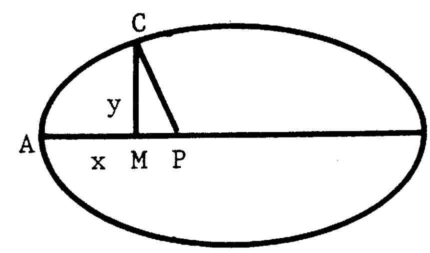
Disse overvejelser fører Descartes til konklusionen: *hvis v bestemme således at ligning (5.3) har en dobbeltrod, og AP sættes lig med det best* *v, så vil CP være normal til kurven.*

Lad os antage, at $f^2(x) + (v-x)^2 - s^2$ er et polynomium i x, så skal v bestemmes således, at

$$f^2(x) + (v-x)^2 - s^2 = (x-x_o)^2\, p(x) \ , \tag{5.4}$$

hvor p(x) er et polynomium i x. Dette tænker Descartes sig gjort ved de li store koefficienters metode. Til illustration af metoden vil vi følge Descartes' beregning af ellipsetangenten. Han benytter følgende ellipseligning

Figur 2



$$y^2 = rx - \frac{r}{q}x^2, \tag{5.5}$$

hvor q er storaksen og r parametren*.

Indsættelse af (5.5) i (5.3) giver

$$rx - \frac{r}{q}x^2 + (v-x)^2 - s^2 = 0, \tag{5.6}$$

eller

$$x^2 + \left(\frac{rq-2vq}{q-r}\right)x + \frac{v^2q - s^2q}{q-r} = 0 \ . \tag{5.7}$$

x_o vil være dobbeltrod i denne ligning, hvis

$$\frac{rq-2vq}{q-r} = -\ 2x_o \tag{5.8}$$

hvoraf *subnormalen* $v - x_o$ til kurven i punktet C kan bestemmes

$$v - x_o = \frac{r}{2} - \frac{r}{q}x_o. \tag{5.9}$$

---

* (5.5) er ækvivalent med

$$\frac{(x-\frac{q}{2})^2}{\frac{q^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{rq}{4}} = 1$$

4-14

Det er en rent algebraisk normalmetode, Descartes har givet. Dette hænger sammen med den måde, Descartes opfatter sine ligninger på, idet han ser dem som en relation mellem to diskrete liniestykker i planen og ikke sc en funtional sammenhæng mellem en uafhængig og en afhængig variabel. Skulle Descartes nærmere have forklaret betydningen af, at to punkter falder samme måtte det have ført til nogle kontinuitets- og grænseværdibetragtninger.

Metoden kompliceres af, at hvis udtrykket for f(x) ikke er meget enkelt, er det besværligt at bestemme v ved de lige store koefficienters metode. Dette problem løste Johann Hudde i 1657 ved at give en regel til bestemmelse af dobbeltrødder i polynomier, der blev medtaget i 1659-udgaver af den latinske oversættelse af *La géométrie*.

Huddes regel

> Hvis i en ligning to rødder er ens, og ligningen multipliceres med en vilkårlig differensrække - således ligningens første led med rækkens første led, ligningens andet led med rækkens andet led, etc. - siger jeg, at produktet vil udgøre en ligning, i hvilken én af de to givne rødder vil findes.
> (*Geometria*, ed. van Schooten, 2. udg., p. 507)

Hudde giver et bevis for denne sætning, som jeg vil gengive i moderne terminologi. Antag, at $x = x_o$ er dobbeltrod i polynomiet p(x). Vi kan da skrive

$$p(x) = (x - x_o)^2 \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x^{i+2} - 2x_o x^{i+1} + x_o^2 x^i). \qquad (5.10)$$

Vi betragter en vilkårlig differensrække

$$a,\ a+b,\ \ldots\ ,\ a+jb$$

og ganger det konstante led i p(x) med a, førstegradsleddet med a + b, osv. Lad os betegne resultatet af denne procedure med (p(x), a,b); der gælder da at

$$(p(x),\ a,b) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i [(a+(i+2)b)x^{i+2} - 2(a+(i+1)b)x_o x^{i+1} + (a+ib)x_o^2 x^i].^* \qquad (5.11)$$

---

* Bemærk at (p(x), a,b) = ap(x) + bxp'(x)

Det ses da, at for $x = x_0$ bliver koefficienterne til α_i lig med 0 for alle i, dvs. x_0 er en rod i $(p(x), a,b)$ q.e.d.

Denne nødvendige betingelse for, at et polynomium har en dobbeltrod, gjorde det lettere at anvende Descartes' metode, idet man kunne indrette sin differensrække således, at man gangede et kompliceret led med 0.

Hudde benyttede sin regel til bestemmelse af ekstremaer, idet han gik ud fra, at hvis α er en værdi, for hvilken $p(x)$ har et ekstremum, så vil ligningen $p(x) = p(\alpha)$ have en dobbeltrod. Han udvidede sin procedure med at gange polynomier og differensrækker sammen og det resulterede i en rege til bestemmelse af subtangenter til algebraiske kurver. Han viste ikke denne regel, men den er interessant, fordi det er et af de første eksemple på, at en subtangent bestemmes ved indsættelse i en formel. Lad kurvens ligning være $p(x,y) = 0$, hvor p er et polynomium i x og y. Huddes regel siger da, at subtangenten t er givet ved

$$t = \frac{-x(p(x,y),\ a,b)_y}{(p(x,y),\ a,b)_x} \quad , \tag{5.12}$$

hvor indekserne betyder, at i tælleren skal p udelukkende betragtes som et polynomium i y, medens det i nævneren skal betragtes som et polynomium i x

6. Robervals tangentmetode

Sidst i 1630'erne fandt Roberval og Torricelli uafhængigt af hinanden en kinematisk tangentmetode. I 1644 viste Torricelli i *Opera geometrica*, hvor ledes man ved hjælp af den kunne bestemme parabeltangenten. Samme år beskrev Mersenne Robervals metode og anvendte den også til bestemmelse af tangenter til parabler. En af Robervals elever skrev en samlet fremstillin *Observations sur la composition des lignes courbes*, af Robervals metode og dens anvendelse på forskellige kurver. Denne fremstilling, som Roberval godkendte, optoges i 1693 i skrifterne fra l'Académie des Sciences og blev temmelig kendt, så den kinematiske tangentmetode kom siden til at bære Robervals navn.

Metoden hviler på to ideer. Den første er at betragte en kurve som banekurve for et bevægeligt punkt, der samtidigt er underkastet to bevægel ser. Den anden er at betragte tangenten i et givet punkt som værende bevægelsesretningen i dette. Hvis de to bevægelser, punktet er underkastet, er uafhængige, findes bevægelsesretningen ved at sammensætte de to frembringende hastigheder ved hjælp af hastighedernes parallelogram, der har været

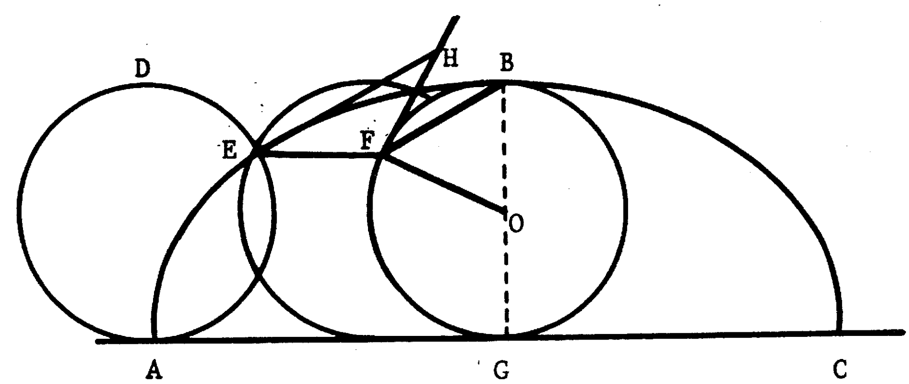
4-16

kendt og benyttet siden oldtiden.

Roberval benyttede imidlertid også sin metode på kurver som kvadratricen, hvor det frembringende punkts bevægelse er beskrevet ved, at det skal være skæringspunkt mellem to linier, der bevæger sig. Her finder hastighedernes parallelogram ikke umiddelbart anvendelse, men det lykkedes Roberval at finde reglen for sammensætningen af de to komponerende bevægelser i det tilfælde også. Faktisk bestemte Roberval de rigtige tangenter til alle de kurver, der var kendte, da han udarbejdede sin tangentmetode. For keglesnittenes vedkommende var fremgangsmetoden dog ikke korrekt, idet han lod de frembringende bevægelser være bevægelserne væk fra brændpunkterne eller fra brændpunktet og ledelinien og sammensatte dem ved hjælp af hastighedernes parallelogram. Parallelogramreglen kan egentlig ikke benyttes ved sammensætning af sådanne bevægelser, men keglesnittene er så pæne, at der kommer noget rigtigt ud af det.

Metoden illustreres bedst med Robervals bestemmelse af tangenterne til den almindelige cycloide (*Observations...*, pp. 76ff): Lad punktet E ved sin bevægelse frembringe cycloiden ABC (figur 3, hvor ABC er banekurven for punktet A, når cirklen AD ruller en gang rundt på linien AC, der er lig med cirklens omkreds). E's bevægelse kan da betragtes som værende sammensat af

1) en jævn, translatorisk bevægelse med retning AC
2) en rotation med konstant vinkelhastighed; dens retning i E er tangentretningen til den roterende cirkel i E.



Figur 3

Gennem E tegner vi linien EF parallel med AC og opsøger dens skæring, F, med cirklen, der har cycloidens symmetriakse BG som diameter og centrum i O. EF vil da være retningen for bevægelse 1), medens FH vinkelret på FO vil være retningen for bevægelse 2). Det numeriske forhold mellem hastighederne for disse to bevægelser kan bestemmes som forholdet mellem to veje, der er gennemløbet i samme tid, altså som forholdet mellem AC og periferien af cirkel AD. Da dette forhold er 1, vil, hvis vi lader EF repræsentere den første bevægelses hastighed, FH = EF repræsentere hastigheden for den anden. Heraf følger, at EH er tangenten til cycloiden i E. Ved et geometrisk bevis indser Roberval, at EH er parallel med FB, dvs. det er meget enkelt at konstruere cycloidetangenterne.

Den kinematiske tangentmetode havde en fordel frem for andre ved at være anvendelig på kurver, der ikke var beskrevet i et cartesiansk koordinatsystem. Den havde også den fordel, at den ved at tage den øjeblikkelige bevægelsesretning som et kendt begreb undgik infinitesimale overvejelser. Men metoden var ikke generel, idet man ikke generelt var i stand til at finde hastigheden. Dens anvendelsesmuligheder var helt afhængige af, om det lykkedes at spalte bevægelsen på banekurven op i bevægelser, hvis hastigheder man kunne finde repræsentanter for, dvs. man skulle kende deres retninger og forholdet mellem deres numeriske størrelser.

Det er interessant at bemærke, at Newtons tangentmetode fra 1666, som vi senere skal vende tilbage til, bygger på de samme ideer som Robervals. Newton var på grund af sin fluxionsmetode i stand til at behandle alle algebraiske kurver under ét, så han ved hjælp af den kinematiske tangentmetode fik en formel til bestemmelse af subtangenter til disse kurver. Men til en transcendent kurve som quadratricen bestemte han tangenten på samme måde som Roberval.

7. Fermats ekstremal- og tangentmetode

Omkring 1636 cirkulerede der blandt de franske matematikere et skrift af Fermat med titlen *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Metode til at undersøge maxima og minima). Det var bemærkelsesværdigt ved at indeholde den første metode til bestemmelse af ekstremaer. Men det indeholdt også noget andet nyt, nemlig den idé at give en tilvækst til en størrelse, vi i dag kan fortolke som den uafhængige variable. En nærmere analyse af Fermats forskellige afhandlinger om ekstremalbestemmelser viser, at Fermat havde observeret, at en størrelse (vi ville sige en differentiabel funktion) kun varierer lidt omkring sine ekstremaer, hvorefter han havde udviklet en procedure til at udnytte dette, og her kom tilvæksterne ind. *Methodus* indledes med sætningen: "Hele teorien til bestemmelse af maxima og minima er baseret på to positioner udtrykt i symboler og denne enkle regel". Reglen er som følger:

4-18

I. Lad A være et led relateret til problemet.

II. Den maximale eller minimale størrelse udtrykkes i led, der indeholder potenser af A.

III. A erstattes af A + E, og maximum eller minimum er da udtrykt i led, der indeholder potenser af A og E.

IV. De to udtryk for maximum eller minimum "sidelignes"* (hvilket betyder noget i retning af, at de sættes næsten lig hinanden).

V. Fælles led fjernes

VI. Alle led divideres med E eller en potens af E, så mindst ét led ikke indeholder E.

VII. Led der stadig indeholder E ignoreres.

VIII. Resterne sættes lig med hinanden.

Løsningen af den sidste ligning vil give en værdi af A, for hvilken det oprindelige udtryk antager et ekstremum. Fermat illustrerede metoden ved at bestemme det punkt E på liniestykket AC, som får rektanglet AE · EC til at blive maximum. For ikke at lade os forvirre af to sæt store bogstaver, der har forskellig betydning, vil vi erstatte A og E i proceduren ovenfor med henholdsvis x og e, og sætte AC = b. Det der skal maximeres er da $x(b-x)$. Vi følger reglen og får

$$(x+e)(b-x-e) \approx x(b-x), \tag{7.1}$$

hvor $\approx$ betegner "sideligheden". Vi fjerner fælles led og opnår

$$2xe + e^2 \approx be. \tag{7.2}$$

Vi dividerer med e,

$$2x + e \approx b. \tag{7.3}$$

Endelig ser vi bort fra e, og resultatet bliver $2x = b$.

Det er fristende at gengive Fermats procedure ved at lade A være x, E være Δx og størrelsen, der skal bestemmes ekstremum af, være $f(x)$. Reglen fortæller os da

IV, V $\quad f(x+\Delta x) - f(x) \approx 0$

VI $\quad \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx 0$

VII, VIII $\quad \left(\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0} = 0.$

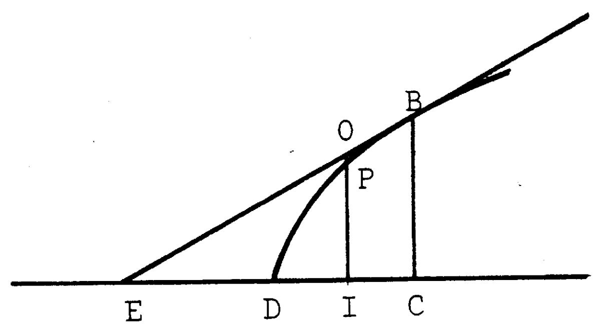
* Fermat bruger glosen adaequo

For differentiable funktioner kunne vi da i nutidig sprogbrug fortolke det som, at det x, i hvilket f(x) har et lokalt ekstremum, er bestemt af ligningen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = 0. \qquad (7.4)$$

Dette ville imidlertid være at lægge for meget i metoden. For det første tænkte Fermat ikke på en størrelse som en funktion. For det andet sagde han ikke noget om, at E skulle være infinitesimal, endsige en lille størrelse, og metoden involverer ingen grænseovergang; den er rent algebraisk. Endelig kan denne fortolkning ikke forklare, hvorfor Fermat i VI siger, at man skal dividere med en potens af E - og ikke bare med E. Hans eksempler viser imidlertid, at han somme tider dividerer med en potens af E, fordi han, hvis hans størrelse indeholder kvadratrødder, kvadrerer "sideligheden", inden han foretager skridt V.

Fermat skrev omkring et dusin korte afhandlinger, hvor han forklarede og anvendte sin ekstremalmetode. Det lykkedes aldrig for ham at trænge helt til bunds i grundlaget for den; men man får det indtryk, at han var tilfreds med at se, at den virkede. Han udvidede brugen af proceduren III-VIII til andre felter også, bl.a. til bestemmelse af tyngdepunkter og tangenter. Et eksempel på sidstnævnte findes allerede i *Methodus*, nemlig bestemmelse af parabeltangenten, som jeg her vil gengive i lidt forandret notation.



Figur 4

Givet parablen DB med akse DC; vi ønsker at bestemme tangenten i B. Dette gøres ved at finde størrelsen af subtangenten EC (figur 4). Lad P være et nabopunkt på parablen og tegn gennem P linien IO parallel med BC. O er dens skæringspunkt med tangenten i B, og I dens skæring med aksen.

Af OI > PI samt af parabelegenskaben:

$$DC : DI = CB^2 : IP^2, \qquad (7.5)$$

følger, at

4-20

$$DC : DI > CB^2 : IO^2. \tag{7.6}$$

Af de ensvinklede trekanter EIO og ECB fås, at

$$CB^2 : IO^2 = EC^2 : EI^2 , \tag{7.7}$$

(7.6) og (7.7) giver, at

$$DC : DI > EC^2 : EI^2 . \tag{7.8}$$

Fermat sætter nu EC = a, DC = d og IC = e. Indsættes dette i (7.8), og ganger man over, fås at

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e . \tag{7.9}$$

Det er på denne relation, Fermat benytter sin procedure fra ekstremalmetoden; han erstatter uligheden med en "sidelighed" og får da efter at have trukket da fra

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e, \tag{7.10}$$

eller

$$de^2 + a^2e \approx 2dae. \tag{7.11}$$

Dernæst dividerer han med e

$$de + a^2 \approx 2da, \tag{7.12}$$

og bortkaster led, der endnu indeholder e, hvorefter han lader "sidelighede gå over i en lighed; det giver

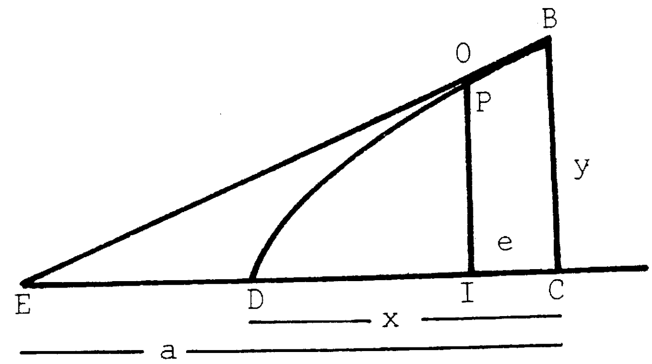
$$a = 2d. \tag{7.13}$$

Altså er den ønskede subtangent bestemt.

Fermat giver i *Methodus* læseren det indtryk, at denne bestemmelse er et specielt eksempel på en ekstremumsopgave. Descartes protesterede stærkt mod dette; ganske vist er det muligt, hvad Descartes selv viste, at bestemm tangenten og normalen ud fra en ekstremumsbetingelse, men han kunne - med rette - ikke se, at der var tale om en sådan i Fermats eksempel. Fermat sendte i 1638 Descartes et brev, hvori han omhyggeligt forklarede sin tangentmetode, heraf fremgår det tydeligt, at det faktisk kun var proceduren fra ekstremalmetoden, Fermat benyttede (*Oeuvres de Fermat*, II, p. 154). I nutidig terminologi kan Fermats ræsonnement gengives således (se figur 5 på næste side):

Vi ønsker at bestemme subtangenten EC = a til kurvepunkt B(x,y) på kurven f(x,y) = 0. Lad IC = e; fra de ensvinklede trekanter OIE og BCE fås

$$OI = \frac{y(a-e)}{a} . \tag{7.14}$$



Figur 5

Ved at betragte punktet P som værende næsten sammenfaldende med 0 kan Fermat skrive

$$f(x-e, \frac{y(a-e)}{a}) \approx 0. \qquad (7.15)$$

Fermat benytter sin procedure på denne "sidelighed", og det er ikke svært at se, at det fører ham frem til et udtryk for a, der svarer til

$$a = \frac{-y \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad . \qquad (7.16)$$

Da metoden kræver, at man kan udvikle $f(x-e, \frac{y(a-e)}{a})$, kunne Fermat i første omgang kun bruge den på algebraiske kurver. Senere lykkedes det ham ved hjælp af nogle approximationer også at bruge metoden til at finde tangenter til nogle transcendente kurver, bl.a. cycloiden.

Der savnedes i Fermats og dermed beslægtede metoder en begrundelse for først at dividere med e og derefter at negligere led, der indeholdt e. Denne adfærd medførte en del kritik. Man tvivlede i og for sig ikke på rigtigheden af de opnåede resultater, men man følte sig utryg ved den måde, hvorpå de var udledt.

4-22

8. Kvadraturmetoder

Indtil fluxions- og integralregningen slog igennem anså matematikerne exhaustionsmetoden for at være den ideale metode til kvadraturer og kurbaturer. Exhaustionsmetoden var indført af Eudoxos og videreudviklet af Archimedes, og sidstnævntes beherskelse af den var suveræn. Jeg vil her ko skitsere ideen i Archimedes' metode ved hjælp af nutidig symbolik. Det ønskes vist, at et ukendt areal eller volumen X er lig med et kendt K (X kan f.eks. være en kugleoverflade og K fire storcirkler i kuglen). Der konstrueres en følge af voksende figurer I_n, indskrevne i X, og en følge af aftagende figurer O_n omskrevne X, dvs.

$$I_n < X < O_n \quad \text{for alle } n \tag{8.1}$$

Der vises, at der gælder, at

$$I_n < K < O_n \quad \text{for alle } n. \tag{8.2}$$

Endvidere vises det, at der for enhver størrelse ε, af samme art som X, gælder, at der findes et N, så

$$O_N - I_N < \varepsilon \,, \tag{8.3}$$

eller at der til ethvert par af ensartede størrelser μ og ν, $\mu > \nu$, kan findes et N, så

$$O_N : I_N < \mu : \nu \,. \tag{8.3'}$$

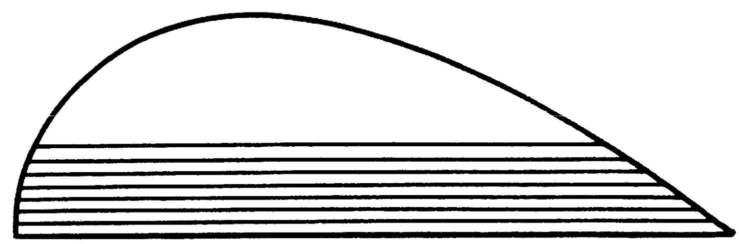
Af (8.1), (8.2) og (8.3) eller (8.3') kan det let ved et dobbelt *reductio ad absurdum* bevis indses, at X = K. Det vanskelige i beviset er at finde K og at etablere ulighederne (8.2) og (8.3) eller (8.3').

Som omtalt i indledningen, opstod der i slutningen af 1500-tallet et behov for at forlade den ganske vist ideale, men besværlige vej til areal- og volumenbestemmelser, som exhaustionsmetoden angav, og i stedet at finde en lettere og mere direkte, en såkaldt kongevej.

Det matematikerne ønskede sig af kongevejen var, at den skulle legalisere den intuitive opfattelse, man har af f.eks. et areal som summen af infinitesimale rektangler. Torricelli skrev i en afhandling, at han var overbevist om, at grækerne, når de udledte deres resultater, byggede på en lignende opfattelse (*Operi di Torricelli*, I, 1. del, p. 140). J.L. Heiberg fund i 1906 af Archimedes' *Om Metoden* bekræftede Torricellis formodning.

Den første samlede fremstilling af en ny kvadratur- og kurbaturmetode gav Cavalieri i 1635 med *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (De kontinuerte indivisiblers geometri fremstillet på en n måde). Cavalieri kalder selv sin metode for indivisibelmetoden, et navn, der også blev benyttet for alle senere lignende metoder.

Egentlig har Cavalieri to indivisibelmetoder; den første, som han kal- der den kollektive, kan i det plane tilfælde beskrives således i forenklet form:



Figur 6

Cavalieri tænker sig givet en plan figur F = ABC, og at linien AB parallelforskydes. Han interesserer sig da for de liniestykker, der under parallelforskydningen er fælles for F og AB, og giver dem navnet *omnes line propositae figurae* (alle liniestykkerne hørende til den givne figur); lad o betegne dem med $\mathcal{O}_F(1)$. Udtrykt moderne har Cavalieri konstrueret en tilordning

$$F \to \mathcal{O}_F(1)$$

fra mængden af plane figurer ind i en mængde, der består af parallelbundter af liniestykker. Derefter udvider han Eudoxos' størrelseslære til også at omfatte størrelser af arten $\mathcal{O}_F(1)$ og får ved et ikke særligt tilfredsstillende bevis etableret følgende vigtige relation

$$F_1 : F_2 = \mathcal{O}_{F_1}(1) : \mathcal{O}_{F_2}(1) \quad . \qquad (8.4)$$

Opgaven bliver da for Cavalieri at udregne højresiden i (8.4) for at finde forholdet mellem de tilsvarende plane figurer. Til denne udregning indfører han en lang række *ad hoc* begreber, som det vil føre for vidt at komme ind p her. Det lykkedes ham i *Geometria* at finde de resultater, vi i dag ville beskrive som en bestemmelse af $\int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx$.

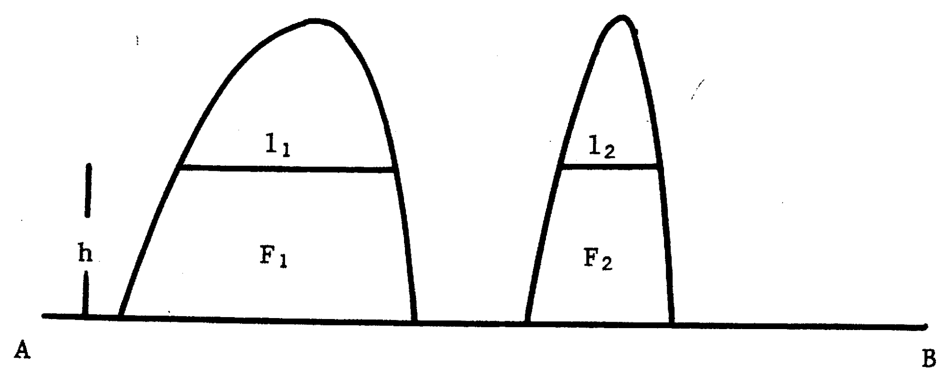
I en senere bog *Exercitationes* (1647) generaliserede Cavalieri sine be greber og opnåede en indsigt, som vi ville erstatte med

$$\int_o^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad \text{for } n = 1,2,\ldots.9.$$

Teorien om den kollektive metode er bygget op efter det græske mønster Den starter med definitioner og postulater, og herfra deduceres i en ren

4-24

verbal form gradvist sætninger, som ikke i sig selv virker nyttige, men som viser sig at skulle bruges senere. Denne opbygning sammen med de mange komplicerede begreber har bevirket, at afhandlingen om den kollektive metode er blevet lang og uoverskuelig. Måske har Cavalieri selv følt dette, i alt fald skrev han til Galilei i 1634, at han ville tilføje et kapitel til *Geometria*, hvor han, af hensyn til dem der fandt begrebet "alle linier" for svært, ville udvikle en anden metode. Denne metode er den, han kalder den distributive. Fundamentet for den er en sætning, der senere er blevet kaldt *Cavalieris sætning*:



Figur 7

Lad der være givet to figurer F_1 og F_2 med samme højde og samme grundlinie AB. Hvis det for enhver afstand $h > o$ gælder, at liniestykkerne l_1 og l_2, afskåret i henholdsvis F_1 og F_2 af linien parallel med AB i afstanden h, har et givet forhold $a : b$, så vil der også gælde, at

$$F_1 : F_2 = a : b\,. \qquad (8.5)$$

Cavalieri åbnede med sin distributive metode vejen for en mere intuitiv behandling af areal- og volumenbestemmelser; det var nemmere at overskue den distributive metode end den kollektive – og også nemmere at kritisere den. En del af den kritik, den blev mødt med, koncentrerede sig om naturen af Cavalieris indivisibilier og problemet om kontinuets sammensætning. Man fortolkede Cavalieri til at mene, at en flade er sammensat af udelelige elementer, og at disse er liniestykker. Det stred med den fra Aristoteles overleverede opfattelse af et kontinuum som værende deleligt i dele af samme art som det oprindelige; disse dele var så igen delelige og så videre, uden grænse.

For at komme uden om den tilsyneladende dimensionsfejl i Cavalieris metode foretrak mange af hans efterfølgere at tænke sig, at en plan figur er sammensat af rektangler med infinitesimale bredder. I praksis betød denne distinktion ikke noget, idet man oftest sammenlignede forholdet mellem to arealer, så at en eventuelt manglende bredde Δx ophæves af relationen

$$\frac{A}{B} = \frac{\sum_1^\infty a_n \Delta x}{\sum_1^\infty b_n \Delta x} = \frac{\sum_1^\infty a_n}{\sum_1^\infty b_n} \tag{8.6}$$

hvor a_n og b_n'erne er højderne i de rektangler, der udgør henholdsvis A og B.*

Denne nok mere tilfredsstillende opfattelse af et areal A som $\sum_1^\infty a_n \Delta x$ løste dog ikke problemerne; det var stadig uklart, hvad man skulle forstå ved en infinitesimal bredde og en uendelig sum.

Cavalieris metoder gav inspiration til mange matematikere til at finde lignende metoder. Nogle fandt også deres metoder uafhængigt af Cavalieri, men de forblev upublicerede i lang tid. Alle metoderne indeholdt de ovenfor omtalte problemer, men de viste sig egnede til at finde nye resultater med. Flere af ophavsmændene til kvadraturmetoderne beskrev dem som en heuristisk måde til udledelse af nye relationer, der derefter kan vises ved et exhaustionsbevis.

I forbindelse med bestemmelsen af $\frac{\Sigma a_n}{\Sigma b_n}$ havde matematikerne ofte nytte af at kende summen af aritmetriske udtryk, man taler ligefrem om aritmetriske kvadraturer. Sådanne benyttede bl.a. Fermat, Roberval, Pascal og Wallis sig af. Roberval udarbejdede sine omkring 1630, men de blev ligesom *Observations* først trykt i 1693 i afhandlingen *Traité des indivisibles*. Lad os se på det eksempel, hvor han bestemmer arealet af et parabelsegment ACD (figur 8). Grundlinien AB deles op i n lige store stykker, og ordinaterne fra delpunkterne til kurven betegnes med a_i.

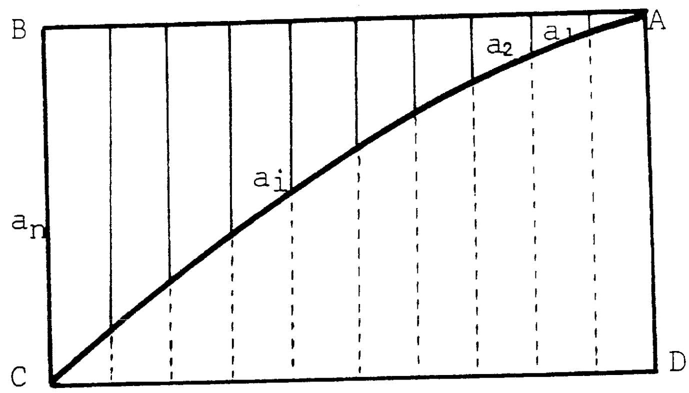
Af parablens egenskaber følger, at

$$\frac{a_i}{a_n} = \frac{i^2}{n^2} . \tag{8.7}$$

---

* Fermat har dog ved udregning af arealet under hyperblerne $yx^n = k (n \neq 1)$ benyttet en metode, hvor han ikke sammenligner to arealer, og hvor Δx'erne ikke er konstanter, men udgør en kvotientrække.

C4-26



Figur 8

Vi har da, at

$$\frac{\text{◸ } ABC}{\text{▭ } ABCD} = \frac{\sum_1^n a_i}{\sum_1^n a_n} = \frac{\sum_1^n i^2 a_n}{n^2 \sum_1^n a_n} = \frac{\sum_1^n i^2}{n^3} \qquad (8.8)$$

Da

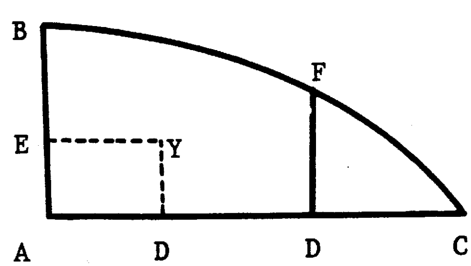
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \quad , \qquad (8.9)$$

får man, når n er uendelig stor, at

$$\frac{\text{◸ } ABC}{\text{▭ } ABCD} = \frac{1}{3} \qquad (8.10)$$

hvorfor parabelsegmentet ACD er 2/3 af det omskrevne rektangel.

Som nævnt blev dette og lignende resultater også fundet af andre, således bemærkede Pascal i en afhandling om beregning af $\sum_{i=0}^{n} (a + id)^m$ (a, d og m naturlige tal), at hans resultater kunne bruges til kvadraturer og kubaturer. Han gav dog ikke mange konkrete eksempler på sådanne, men var til gengæld interesseret i at systematisere problemerne. I afhandlingen *Traité des trilignes rectangles* (1658) gav han en oversigt over, hvilke 'summer', der var nødvendige for at finde arealer, volumener og momenter.*



Figur 9

* Et moment af en figur m.h.t. en akse er denne figurs størrelse gange afstanden mellem figurens tyngdepunkt og aksen.

Lad ABC være et areal med tyngdepunkt Y, og lad AD og FD være henholdsvis abscisser og ordinater til kurven BFC. De summer, Pascal betragtede, var ΣFD, ΣFD^2, ΣFD^3, $\Sigma FD \cdot DA$, $\Sigma FD^2 \cdot DA$ og $\Sigma FD \cdot DA^2$.

De summer, der indeholder DA, kaldte han for trekantssummer og de, der indeholder DA for pyramidialsummer.* Pascal gør opmærksom på, hvilke problemer man kan løse, hvis man kender disse summer. F.eks. vil et kendskab til ΣFD give arealet ABC, $\frac{1}{2}\Sigma FD^2$ giver momentet af ABC m.h.t. AC (dvs. $YD \cdot ABC$), medens $\Sigma FD \cdot DA$ giver ABC's moment m.h.t. AB ($YE \cdot ABC$). For at indse disse relationer foretager Pascal en række transformationer af sine summer, som vi i dag ville beskrive som integraltransformationer. Vi skal senere se, at en af dem virkede meget inspirerende på Leibniz.

Den, der drev det videst med de aritmetiske kvadraturer, var Wallis, der i *Arithmetica infinitorum* nåede frem til et resultat, der i vor terminologi kan udtrykkes således

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\ell} i^n}{\sum_{i=0}^{\ell} \ell^n} = \frac{1}{n+1}$$

---

* For diskrete størrelser definerede han en trekantssum som

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} f(j) \text{ og en pyramidialsum som}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=j}^{n} f(k), \text{ disse er lig med henholdsvis}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\, f(i) \text{ og } \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} f(i).$$ For kontinuerte størrelser bliver dette - i integralnotation - til

$$\int_0^a \int_x^a f(t)dt\, dx \text{ og } \int_0^a \int_x^a \int_t^a f(u)du\, dt\, dx,$$ og disse er lig med henholdsvis $\int_0^a x\, f(x)dx$ og $\frac{1}{2} \int_0^a x^2 f(x)dx$.

4-428

for alle rationale eksponenter forskellig fra -1. Wallis tvivlede dog ikke på, at hans resultater også gjaldt for f.eks. $n = \sqrt{3}$. Hans fremstilling er ikke tynget af beviser, den hviler på, hvad han kaldte *modus inductionis*. Dette begreb er senere blevet kaldt for ufuldstændig induktion, analogislutning ville måske være nok så heldigt et ord. Den fuldstændige induktion stammer iøvrigt fra Pascal, der benyttede den i forbindelse med bestemmelse af binominalkoefficienter.

9. Newtons analytiske undersøgelser

Newton kom i 1661 til Trinity College i Cambridge, hvor han i årene som undergraduate ikke synes at have interesseret sig for matematik. Som ældre fortalte Newton sin kollega De Moivre, at han i sommeren 1664 tilfældigt faldt over en astrologibog, hvis diagrammer han ikke kunne forstå, og at dette gav ham stødet til at studere matematik. Det er muligt at følge Newtons matematiske udvikling ganske godt, thi han gemte næsten alle sine matematiske notater, og en publikation af disse startede i 1967 i værket *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (ed. D.T. Whiteside).

Vi kan her se, at Newton i sommeren 1664 gik i gang med at studere Van Schootens kommenterede udgave af Descartes' *Geometria* , og at han specielt blev interesseret i dennes metode til bestemmelse af subnormaler Men han gik også på egen hånd i gang med at finde en metode til bestemmels af subtangenter. Senere fulgte et studium af Wallis' *Arithmetica Infinitorı* dette gav ham en indsigt i aritmetiske kvadraturer, og inspirerede ham til at se på uendelige rækker. Hans første arbejde inden for dette felt er en generalisation af formlen $(1+x)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots + 1$ til n'er, der ikke er naturlige tal, hvorved der opnås en uendelig række.

I sommeren 1665 tog Newton sit tidligere videnskabelige arbejde op til revision, og der fulgte en meget kreativ periode, hvor bl.a. fluxionsregnir gen blev skabt; den matematiske kulmination nåedes i oktober 1666 med udarbejdelsen af en afhandling, der er blevet kaldt *The October 1666 Tract.* Denne, som vi skal vende tilbage til, blev dog ikke helt færdig, måske ford Newton på det tidspunkt blev grebet af optikken. Et par år efter genoptog han arbejdet med fluxioner og kombinerede det med sine undersøgelser af uendelige rækker. Han skrev to afhandlinger om disse emner *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* (Om analyse ved ligninger, uendelige i antallet af led) og *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Metoden om fluxioner og uendelige rækker), men det lykkedes ham ikke at få dem publiceret, den første udkom først i 1711 og den anden posthumt i 1737 i en forkortet engelsk udgave.

Omkring 1676 tog Newton efter en korrespondance med Leibniz igen fat på sine fluxioner, det resulterede i en teori om oprindelige og finale forhold, som vi også skal vende tilbage til; senere skete der ingen væsentlige ændringer i hans arbejde med fluxioner. Newton havde således udarbejdet hele sin analytiske teori, da han i 1687 udsendte sit meget betydningsfulde fysiske værk *Principia*; og man ville måske vente, at han heri havde bygget kraftigt på sin fluxionsregning. Dette er imidlertid ikke tilfældet, idet hans matematiske apparat i *Principia* mest er den traditionelle geometri - der findes dog argumenter fra fluxionsteorien; men disse er ikke særligt klart præsenterede.

Efter udgivelsen af *Principia* følte Newton trang til at skrive et matmatisk arbejde om, hvorledes han havde tænkt sig, at de dér forekommende kvadraturer skulle udføres. I 1693 forelå dette arbejde med titlen *De quadratura curvarum*; dette sidste af Newtons analytiske arbejder skulle blive det første, der blev offentliggjort, selvom det også måtte vente en tid, nemlig til 1704, hvor det udkom som et appendiks til hans *Opticks*.

De få af Newtons analytiske arbejder, der blev publiceret, blev det således alle efter, at Leibniz' differential- og integralregning var en etableret teori på kontinentet, hvor de følgelig ikke kom til at få nogen nævneværdig indflydelse. De engelske matematikere derimod fulgte Newtons spor og blev ved med det til op i 1800-tallet.

Vi kan i dag ved et studium af Newtons og Leibniz' matematiske papirer se, hvor forskelligt deres teorier opstod, og at Leibniz' arbejde har været uafhængigt af Newtons. Det kunne samtiden derimod ikke se, og der opstod en ret så heftig prioritetsstrid om ophavsretten til den nye infinitesimale disciplin. Striden varede længe (men var nok værst i årene lige efter 1711) og var sikkert medvirkende til, at de engelske matematikere i nogen grad isolerede sig.

I det følgende vil vi se noget mere detaljeret på enkelte af faserne i Newtons virke i analysen.

10. Newtons bestemmelse af subnormalen til algebraiske kurver

Man ser allerede i Newtons tidlige analytiske arbejder fra 1664 hans evne til at generalisere resultater. Således opstillede han efter at have bestem subnormalen til en række algebraiske kurver ved hjælp af Descartes' metode og Huddes regel følgende regel til bestemmelse af subnormalen v (*Mathematic Papers*, I, p. 236):

> Multiply each terme of y^e equat: by so many units as x hath dimensions in y^t terme, divide it by x & multiply it by y for a Numerator. Againe multiply each terme of y^e equation by soe many units as y hath dimensions in each terme & divide it by -y for a denom: in y^e valor of v.

Dvs. når kurvens ligning er af formen

$$f(x,y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i y^j = 0 \quad , \qquad (10.1)$$

bestemmes v af

$$v = \frac{\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} i\, x^i y^j\right) \left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}\, j\, x^i y^j\right) : (-y)} \quad . \tag{10.2}$$

Dette svarer i vor notation til, at

$$v = -\frac{f'_x}{f'_y} \cdot y = \frac{dy}{dx} \cdot y \quad . \tag{10.3}$$

Newtons notater fra 1664 og foråret 1665 indeholder tilsvarende regle til bestemmlse af subtangenter og krumningsradier. Endvidere kan man se, a Newton beskæftigede sig med at løse omvendte normalopgaver, dvs. bestemme en kurve hvis subnormal er givet. Dette lykkedes for ham i de tilfælde, hv subnormalen kan skrives på en form, der svarer til

$$v = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{2h^2(x)} \;; \tag{10.4}$$

han finder da, at kurvens ligning er givet ved

$$y^2 = \frac{g(x)}{h(x)} + k \quad , \tag{10.5}$$

hvor k er en vilkårlig konstant.

Der er kun ganske få forsøg på kvadraturer i Newtons tidlige notater. Vi skal straks se, at da Newton virkelig gav sig til at angribe kvadraturproblemer, behandlede han dem som stamfunktionsproblemer.

11. Oktober 1666-Traktaten

Efter at være taget bort fra det pestramte Cambridge i sommeren 1665 genoptog Newton sit arbejde med analysen. Samtidig skiftede grundlaget for ha arbejde karakter, idet han - i lighed med hvad Roberval og Torricelli havd gjort i deres tangentmetoder - gik over til at betragte alle kurver som banekurver for en kontinuert bevægelse i tiden. Bevægelsens momentanhastighed anså Newton ligesom Roberval og Torricelli for at være et med bevægels givet begreb, men i modsætning til dem fandt han en metode til i visse tilfælde at bestemme dens størrelse. Bevægelse blev således den helt fundamentale basis for Newtons undersøgelse af tangenter, vendepunkter, krumninger arealer og buelængder.

4-32

Resultatet af Newtons arbejder er som nævnt samlet i *Oktober 1666-Traktaten* (*Mathematical Papers*, I, pp. 400-448). Den indeholder 8 "Propositioner", der er "tilstrækkelige til at løse geometriske problemer ved hjælp af bevægelse". Endvidere indeholder den 12 problemer, til hvis løsning disse sætninger er anvendt.

Den vigtigste sætning er proposition 7, der udtaler sig om, hvorledes man ud fra en given algebraisk relation mellem liniestykker beskrevet i samme tid skal bestemme forholdet mellem de beskrivende partiklers hastigheder. For to liniestykkers vedkommende tager sætningen sig således ud i vor notation.

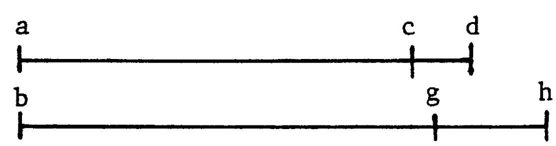
Proposition 7: Hvis partiklerne A og B beskriver henholdsvis liniestykkerne x og y i samme tid, og disse opfylder relationen

$$f(x,y) = \Sigma\alpha_{ij}x^iy^j = 0 \quad , \tag{11.1}$$

så bestemmes forholdet mellem A's hastighed p og B's hastighed q af ligningen

$$\Sigma \frac{pi}{x}\alpha_{ij}x^iy^j + \Sigma \frac{qj}{y}\alpha_{ij}x^iy^j = 0 \quad . \tag{11.2}$$

Beviset for (11.2) forløber således: Lad liniestykket $ac = x$ og liniestykket $bg = y$ (figur 10); partiklen A har da i c hastigheden p, mens B i g har hastigheden q.



Figur 10

I et "lille øjeblik" o kan A's og B's bevægelser betragtes som jævne, hvorfor forøgelserne cd og gh i de gennemløbne veje svarende til tidsrummet o vil være $p \cdot o$ og $q \cdot o$. Vi kan da indsætte $x + po$ og $g + qo$ i (11.1); det giver

$$\Sigma\alpha_{ij}(x+po)^i(y+qo)^j = 0 \quad , \tag{11.3}$$

hvoraf

$$\Sigma\alpha_{ij}x^iy^j + \Sigma\alpha_{ij}(pix^{i-1}y^j + qjx^iy^{j-1})\ o + \Sigma\alpha_{ij}(\ldots)o^2 + \ldots = 0 \tag{11.4}$$

Da det første led ifølge (11.1) er lig med 0, går o op i venstre side af (11.4). De led, der efter division med o endnu indeholder o er, siger Newton, uendeligt små, hvorfor de udelades. Det giver alt i alt, at koefficienten til o i (11.4) skal være 0, hvilket netop er hvad (11.2) udtrykker.

I vores terminologi siger sætning 7, at hvis vi har givet relationen (11.1) mellem x og y, bestemmes p og q af relationen

$$p \cdot f'_x + q \cdot f'_y = 0 \tag{11.5}$$

eller af

$$\frac{q}{p} = -\frac{f'_x}{f'_y} \ . \tag{11.6}$$

Newton indfører symbolerne $\cdot\mathfrak{X}$ og $\mathfrak{X}\cdot$ for størrelserne svarende til $x \cdot f'_x$ og $y \cdot f'_y$ og får derved sætning 7 skrevet på en kort form.

Når tiden t er den uafhængige variable, svarer p og q til $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$; i mange tilfælde lader Newton dog x være den uafhængige tidsvariable, således at $p = 1$; q kommer da til at svare til $\frac{dy}{dx}$. I sine senere afhandlinger udfører Newton de velkendte betegnelser $\dot{x}$ og $\dot{y}$ for p og q.

Vi vil lige vende tilbage til beviset for sætning 7, idet den indeholder en argumentation, som Newton ofte senere benytter. Han havde en uafhængig variabel (tiden), som han gav en lille tilvækst o, og så dernæst på de tilvækster i de uafhængige variable, som o giver anledning til. Han fandt, at disse kunne sættes lig med henholdsvis po og qo, og da $\frac{po}{qo} = \frac{p}{q}$, fører dette til relationen

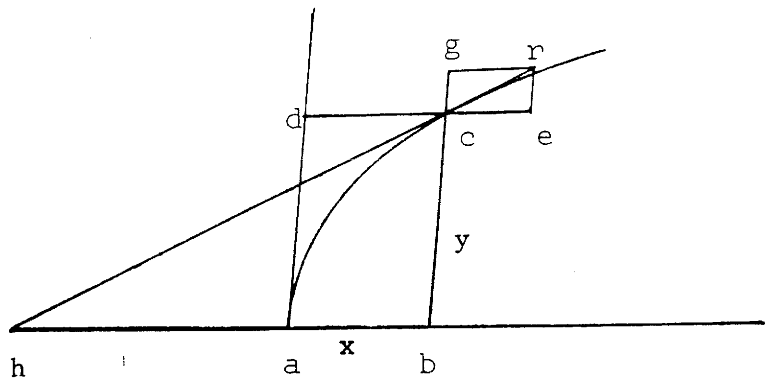
$$\frac{\text{x's forøgelse}}{\text{y's forøgelse}} = \frac{p}{q} \ . \tag{11.7}$$

12. Tangentbestemmelser i Oktober 1666-Traktaten

Med sætning 7 til sin rådighed kunne Newton angive en generel metode til bestemmelse af subtangenter til algebraiske kurver (*Mathematical Papers*, I, p. 416). Han benyttede samme princip som Roberval og Torricelli havde brugt i deres tangentmetode: Lad der være givet en kurve ac (figur 11), og antag at $ab = x$, $bc = y$ og kurvens ligning er $f(x,y) = 0$; Newton ønsker at finde et udtryk for subtangenten $hb = t$. Han opfatter da kurven som banekurve for den bevægelse, c får ved at deltage i en parallelforskydning af linierne bc og dc; c's hastighed vil da være sammensætningen af bc's og dc's hastigheder, der som i sætning 7 sættes lig med henholdsvis p og q (dvs. når bc har gennemløbet stykket x, har den hastigheden p og tilsvarende for dc). Da hastighedens retning er tangentretningen, finder man tangenten i c ved at afsætte ce og cg på henholdsvis dc's og bc's forlængelser, således at

$$\frac{ce}{cg} = \frac{p}{q} \quad , \qquad (12.1)$$

og derefter trække diagonalen cr.



Figur 11

Af de ensvinklede trekanter hbc og cer får man

$$\frac{t}{y} = \frac{hb}{bc} = \frac{ce}{cg} = \frac{p}{q} \qquad (12.2)$$

hvoraf

$$t = \frac{p}{q} \cdot y \quad . \qquad (12.3)$$

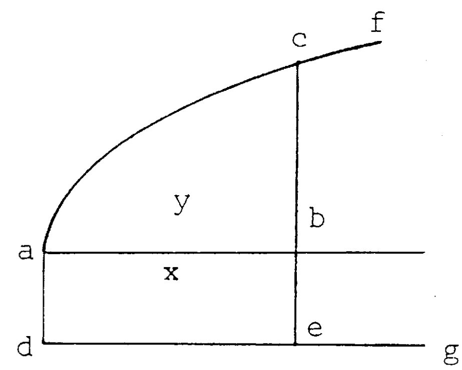
I denne relation kan $\frac{p}{q}$ findes ved hjælp af sætning 7.

Det er altså ved hjælp af (12.3) muligt at bestemme subtangenten til alle algebraiske kurver. Dette er et stort fremskridt fra Robervals og Torricellis tangentmetode, idet det jo i den var nødvendigt for hver ny kurve at finde en snedig måde at opløse hastigheden på.

13. Arealbestemmelser i Oktober 1666-Traktaten

Arealbestemmelser var for Newton identiske med en omvendt differentialopgave. Han stillede sig først den opgave at finde en kurve, hvis areal er udtrykt i en given ligning (*Mathematical Papers*, I, pp. 427ff).

Lad ab = x og abc = y og lad der være givet en algebraisk relation mellem x og y. Newton vil da finde kurven med arealet y ved at bestemme bc som funktion af x. For at gøre dette anlægger han rektanglet abde på x med siden be = 1 og antager, at linien cbe parallelforskydes, således at den beskriver abde = x og abc = y. Newton sætter p og q lig med "de hastigheder hvormed arealerne x og y forøges" (svarende til $p = \frac{dx}{dx} = 1$ og $q = \frac{dy}{dx}$), og han tænker sig, at sætning 7 også finder anvendelse på denne situation.



Figur 12

Videre siger han, at der gælder, at

$$\frac{q}{p} = \frac{bc}{be} \quad . \qquad (13.1)$$

Man kan forestille sig, at Newton har udledt (13.1) ved at sige, at der må gælde, at

$$\frac{y\text{'s forøgelse}}{x\text{'s forøgelse}} = \frac{bc}{be} \quad ; \qquad (13.2)$$

denne relation giver sammen med (11.7) netop (13.1). Da $be = 1$ og $p = 1$, følger der af (13.1), at

$$bc = q \quad ; \qquad (13.3)$$

dvs. når man anvender sætning 7 på den givne arealrelation, får man bc udtrykt ved x, hvilket netop var opgaven.

Som det første eksemple betragter han tilfældet, hvor der er givet relationen

$$-4rx^3 + 9y^2 = 0 \quad . \qquad (13.4)$$

Af sætning 7 følger, at

$$q = \frac{12rx^2}{18y} \, , \qquad (13.5)$$

der sammen med (13.4) viser, at

$$q = \sqrt{rx} \quad , \qquad (13.6)$$

altså er den søgte kurve en parabel.

Den omvendte opgave, hvor bc's relation til $ab = x$ er kendt, og arealet skal bestemmes, løses som et stamfunktionsproblem. I traktaten findes der en tabel over en lang række funktioners stamfunktioner.

Man bemærker, at Newton ved at indføre tiden som uafhængig variabel har fjernet sig fra den hidtidige metode, hvor et areal betragtedes som en sum af infinitesimale rektangler. Han behøver kun at se på arealtilvæksten i ét punkt.

Som nævnt benyttede Newton også bevægelse til at udlede en formel for krumningsradier og til løsning af rektifikationsproblemer. Sidstnævnte løst han ligesom arealbestemmelserne som omvendte opgaver, idet han først bestemte de kurver, der hører til givne udtryk for buelængder.

Den udviklede disciplin fik navnet fluxionsregning, og da Newtons resultater ikke blev publiceret, blev den i starten kun kendt i en inderkreds.

14. "The prime and the ultimate ratio"

Da Newton sidst i 1670'erne genoptog sit arbejde med fluxionsregningen spekulerede han igen over, hvorledes man skulle bestemme forholdet mellem to fluxioner. Hans udgangspunkt var de samme tanker, som ligger i relation (11.7), nemlig at forholdet mellem to fluxioner næsten er lig med forholdet mellem forøgelsen frembragt i samme tid; men han ønskede at præcisere dette nærmere. Til illustration af resultatet af hans undersøgelser vil vi se på nogle af de indledende bemærkninger i *Quadratures of Curves* (engelsk oversættelse fra 1710 af *De quadratura curvarum*, findes i *The Mathematical Works of Isaac Newton*, I, pp. 141-160).

> I don't here consider Mathematical Quantities as composed of Parts *extreamly small*, but as *generated by a continual motion*. Lines are described, and by describing are generated, not by any apposition of Parts, but by a continual motion of Points... (*op.cit.* , p. 141).

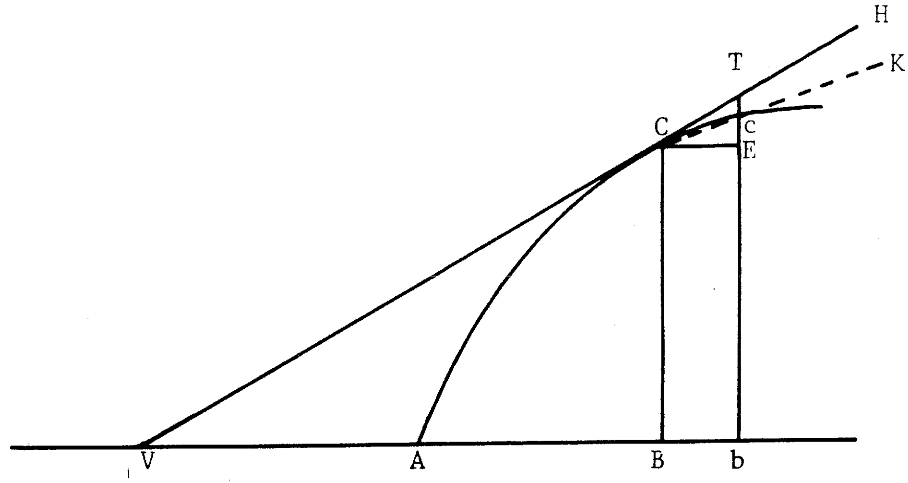
Hastighederne for de beskrivende bevægelser kaldes de frembragte størrelsers fluxioner, medens selve de frembragte størrelser kaldes fluenter. Newton forestiller sig en række

$$z''' \quad z'' \quad z' \quad z \quad \dot{z} \quad \ddot{z} \quad \dddot{z} \;, \qquad (14.1)$$

hvor størrelsen til højre for en størrelse er dens fluxion, medens den til venstre er en fluent, der har størrelsen selv som fluxion. Spørgsmålet er da, hvorledes man skal bestemme fluxionerne, eller i første omgang forholdet mellem to fluxioner:

> Fluxions are very nearly as the Augments of the Fluents, generated in equal but infinitely small parts of time, and to speak exactly are in the *Prime ratio* of the nascent Augments, but they may be expounded by any Lines that are proportional to 'em (*op.cit.*, p. 141).

Eksempelvis siger Newton (figur 13), at hvis vi tænker os, at linien BC



Figur 13

bevæger sig til stillingen bc, så vil forøgelserne af AB, BC og $\widehat{AC}$ være Bb, Ec og $\widehat{Cc}$; men forholdet mellem siderne i trekant CET vil være det "oprindelige forhold mellem de vordende forøgelser", hvorfor fluxionerne af AB, BC og $\widehat{AC}$ forholder sig som siderne i trekant CET eller som siderne i den dermed ensvinklede trekant VBC.

Man kan også beregne forholdet mellem fluxionerne som det "finale forhold mellem de forsvindende dele":

> Draw the Right Line Cc, and produce the same to K. Let the Ordinate bc return to its former place BC, and the points C and c coming together, the Right Line CK co-incides with the Tangent CH and the Evanescent Triangle CEc in its ultimate form becomes similar to the Triangle CET, and its Evanescent Sides CE, Ec and Cc will be ultimately to one another as are CE, ET and CT... and therefore the Fluxions of the Lines AB, BC and AC are in the same *Ratio*. (*op.cit.*, p. 141).

Teorien om oprindelige og finale forhold finder også anvendelse til at bestemme forholdet mellem fluxioner i algebraiske udtryk, og til at bestemme fluxionen af x^n, når det er forudsat at x frembringes ved en jævn bevægelse med hastigheden 1. Det sidste sker på følgende måde: Newton bemærker, at på samme tidspunkt som fluenten x er blevet til $x+o$, vil x^n være blevet til

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}\, oo\, x^{n-2} + \text{etc.} \quad , \qquad (14.2)$$

hvorfor forholdet mellem forøgelserne vil være

$$o:(nox^{n-1} + oo(\ldots\ldots)) = 1:(nx^{n-1} + o(\ldots\ldots)) \quad . \qquad (14.3)$$

4-538

Når forøgelserne forsvinder, vil det finale forhold være $1:nx^{n-1}$. Dette er forholdet mellem fluxionerne af x og x^n, og da fluxionen af x var forudsat at være 1, angiver dette forhold ikke blot den relative, men også den absolutte størrelse af fluxionen af x^n, svarende til at man går et skridt til højre i rækken (14.1).

Den tidligere fundne sammenhæng mellem hastigheder og kurvearealer giver Newton, at et skridt til venstre i rækken (14.1) svarer til at bestemme arealet under den kurve, hvis ordinat er udgangspunktet. Men dette, siger Newton, "is the more difficult problem", nemlig problemet at finde stamfunktionen til en given funktion.

Det ovenstående viser savnet af en eksakt definition af grænseværdi, idet det er størrelsen svarende til

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} ,$$

Newton må bruge så megen kraft på at beskrive, og som han betegner med det oprindelige forhold af de vordende forøgelser eller det finale forhold mellem de forsvindende dele.

15. Leibniz' vej til analysen

Selvom Leibniz gemte mange af sine matematiske manuskripter, er det ikke så let at få et indblik i den udvikling, der førte ham frem til analysen, fordi kun få af disse manuskripter endnu er publicerede. Men selv et fuldstændigt kendskab til Leibniz' matematiske arbejder ville nok ikke give he[l] forklaringen; man må i sine forsøg på at forstå Leibniz' udvikling skele t[il] hans filosofiske ideer. Givetvis har disse haft en indflydelse på hans mate[-] matiske undersøgelser; her skal blot nævnes hans forsøg på at finde et *characterista generalis*, dvs. et generelt symbolsprog, i hvilket alle forme[r] for ræsonnementer skulle kunne udtrykkes. Dette gav sig i hans matematiske arbejder udslag i en stor interesse for notation.

Leibniz var af uddannelse jurist, men beskæftigede sig også i sin studietid med filosofi og logik, derimod kun lidt med matematik. Hans store interesse for dette fag blev først vakt under hans ophold i Paris som udsendt diplomat for kurfyrsten af Mainz. Leibniz har selv berettet noget om, hvad der skete i denne periode (1672-76) i *Historia et origo calculi differentialis* (Differentialregningens historie og oprindelse, den findes i en engelsk oversættelse i *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*). Denne afhandling må læses med forbehold, da den er skrevet små 40 år efter Pariseropholdet som et svar på et polemisk indlæg fra Newton-tilhængere i striden om prioriteten til differentialregningen. Alligevel er der ingen grund til at tvivle på, at det er rigtigt, når Leibniz indledningsvis siger, at der var to spor, der førte ham frem til den disciplin, han kaldte *calculus*.

Det ene var hans arbejde med rækker, hvor han fik ideen til at betragte en differens- og en sumoperator og deres omvendte sammenhæng. Det andet var hans beskæftigelse med geometriske problemer, gennem hvilken han fandt ud af, at en tangentbestemmelse afhænger af uendelig små ordinat- og abscissedifferenser, og at en kvadratur er afhængig af summen af rektangler med infinitesimale bredder.

16. Leibniz' arbejde med rækker

Leibniz' interesse for rækker stammer fra hans studietid i Tyskland. Han udledte ud fra den identiske sandhed $A = A$ nogle egenskaber ved elementære talrækker.

Fra $A = A$ deduceres $A - A = 0$ og dermed

$$A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0$$

eller

$$A - (A - B) - (B - C) - (C - D) - (D - E) - E = 0$$

dvs.

$$(A - B) + (B - C) + (C - D) + (D - E = A - E \quad ,$$

altså summen af differenserne i en række er lig med differensen mellem første og sidste led. F.eks. har rækken

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25$$

differenserne

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$$

hvorfor $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Hvis rækkens led går mod 0, benytter Leibniz samme princip til at finde summen af en uendelig række. Eksempelvis finder han, at

$$0 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots.$$

eller

$$0 = 1 - (1 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - \ldots..$$

hvorfor

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots..$$

Heraf kan Leibniz bestemme summen af de reciprokke trekantstal, idet der følger, at

$$2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots.$$

Det var dette og lignende resultater, der fik Leibniz til at sætte sig i forbindelse med matematikerne i Paris og London. Derved gik det op for ham, at hans resultater ikke var nye, og at han manglede baggrund for at kunne arbejde med tidens matematiske problemer, hvorfor han satte sig for at få et bedre indblik i den matematiske litteratur. Der er ingen tvivl om, at det har kedet ham at læse det ene ordrige bevis efter det andet; han har straks forsøgt at gribe ideen i et bevis og prøvet, om den indeholdt en metode, han kunne generalisere. Han siger selv, at han fik sin første inspiration ved at læse en af Pascals sætninger; det vil vi se på i næste afsnit.

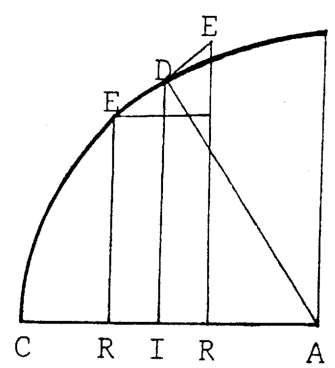
17. Leibniz' udvidelse af Pascals sætning om en sum af sinusser

I *Traité des Sinus du Quart du Cercle* benyttede Blaise Pascal relationen (figur 14)

$$\frac{DA}{DI} = \frac{EE}{RR} \tag{17.1}$$

til at slutte, at der i en cirkel med radius $AD = a$ gælder, at

$$\Sigma DI \cdot EE = a\Sigma RR \quad . \tag{17.2}$$



Figur 14

Hvis vi sætter $CI = x$ og $ID = y$, svarer dette til

$$\int_0^{a\frac{\pi}{2}} y\,ds = \int_0^a y\,dx = a^2 \tag{17.3}$$

Leibniz ser, at (17.1) ikke er speciel for cirklen, men kan benyttes for enhver kurve, hvis man erstatter radius AD med normalstykket n fra kurven til aksen. Derved finder han en sætning, der skrevet i vor notation siger, at

$$\int_{s_1}^{s_2} y\,ds = \int_{x_1}^{x_2} n(x)\,dx \quad . \tag{17.4}$$

Resultatet var ikke nyt, men opmuntrede Leibniz til at gå videre med at transformere summer. Han får også i eksemplet øje på nytten af at betragte den trekant, han kalder den karakteristiske trekant (med sider dx, dy og ds) Ved at benytte den sammen med en opspaltning af et areal i trekanter i stedet for rektangler finder han sin berømteste transformation, den såkaldte transmutationssætning.

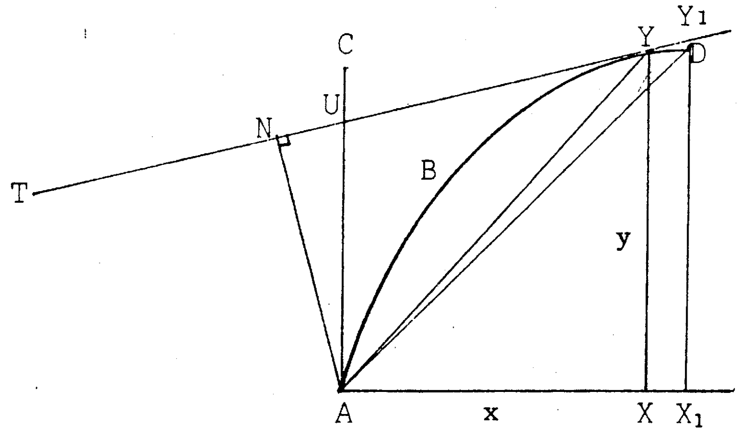
4-42

18. Leibniz' transmutationssætning

Leibniz tænker sig givet en kurve ABY med $AX = x$ og $XY = y$ (figur 15) og definerer ud fra den og dens tangenter en ny kurve: Lad YT være tangenten ti kurven ABY i punktet $Y(x,y)$, lad AC være linien vinkelret på aksen AX gennem toppunktet A, og lad endelig U være skæringspunktet mellem YT og AC. Den nye kurve er da bestemt ved at have koordinaterne

$$(x,z) = (AX,AU) \tag{18.1}$$

(denne definition giver os, at $z = y - x \frac{dy}{dx}$).



Figur 15

Leibniz ønsker at bestemme en sammenhæng mellem arealerne under den oprindelige og den nye kurve. Han nedfælder da den vinkelrette AN på YT. Trekant ANU er ensvinklet med den karakteristiske trekant YDY_1, hvorfor

$$\frac{YY_1}{YD} = \frac{AU}{AN} \quad . \tag{18.2}$$

Da $z = AU$, får man heraf, efter at have ganget over, at

$$z \cdot YD = AN \cdot YY_1 = 2\Delta AYY_1 \quad , \tag{18.3}$$

ved summation giver dette

$$\text{omn.}z\ [YD] = 2 \text{ segment } ABYA, \tag{18.4}$$

omn. er en forkortelse for *omnes* (alle).

Dette svarer til

$$\int_o^{x_o} z dx = 2 \int_o^{x_o} y dx - x_o y_o \quad , \tag{18.5}$$

hvor x_o er abscissen til punktet på kurven med ordinat y_o.

Denne sætnings anvendelighed ligger i den forbindelse, den etablerer mellem tangentbestemmelser og kvadraturer. Da det var kendt, at tangenten til højere ordens parablerne

$$\left(\frac{y}{a}\right)^m = \left(\frac{x}{b}\right)^n \qquad \text{- m og n er naturlige tal -}$$

skærer toppunktstangenten AC således at $z = AU\ z\ \frac{m-n}{m}\ y$, kan transformationen benyttes til at eftervise parablernes kvadratur, idet den giver et resultat svarende til

$$\int_o^{x_o} \left(\frac{m-n}{m}\right) y\, dx = 2 \int_o^{x_o} y dx - x_o y_o \qquad (18.6)$$

og dermed

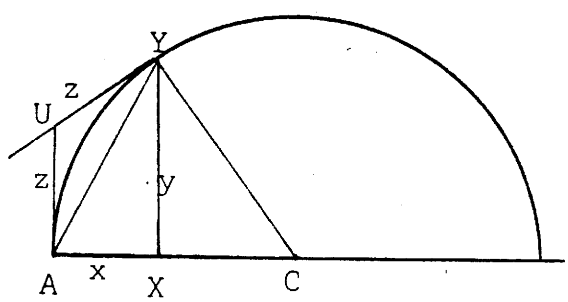
$$\int_o^{x_o} y dx = \frac{m}{m+n}\, x_o y_o \quad . \qquad (18.7)$$

Leibniz forsøger også, om transformationen kan give ham cirklens kvadratur; transmutationssætningen (18.4) viser (jfr. figur 16), at

$$\int_o^{x_o} z dx = 2 \text{ cirkelafsnit } \widehat{AYA} \qquad (18.8)$$

(vi har for overblikkets skyld gengivet Leibniz' ræsonnement med integraler i stedet for omn.). Geometrisk indser Leibniz, at der i en cirkel med radius a gælder, at

$$x = \frac{2az^2}{a^2 + z^2} \quad . \qquad (18.9)$$



Figur 16

Dette indsat i realtionen svarende til $\int_o^{z_o} x dz + \int_o^{x_o} z dx = xz$ giver sammen med (18.8), at

4-49

$$\tfrac{1}{2}xz - \int_{o}^{x_o} \frac{az^2}{a^2+z^2}\, dz = \text{cirkelafsnit } \overset{\frown}{AYA} \quad , \qquad (18.10)$$

hvorfor

$$\text{cirkeldel AYXA} = \tfrac{1}{2}x(y+z) - \int_{o}^{z_o} \frac{az^2}{a^2+z^2} \cdot dz \quad . \qquad (18.11)$$

Hvis specielt cirklens radius er 1 og buen AY er $\frac{\pi}{2}$, fører det til

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_{o}^{1} \frac{z^2}{1+z^2}\, dz \quad . \qquad (18.12)$$

Integranden udregner Leibniz ved en lang division

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots . \qquad (18.13)$$

og han kan da ved hjælp af tidligere fundne kvadraturer integrere rækken ledvis. Det fører ham til

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots . \qquad (18.14)$$

Leibniz har hermed fundet en række til bestemmelse af cifrene i π, men det var stadig uvist, om π var algebraisk eller transcendent over de rationale tal.

19. Leibniz' transformationer ved hjælp af momenter

Leibniz benyttede, inspireret af Pascal, også momenter til at opnå resultater, der svarer til integraltransformationer. Disse opstår ved, at Leibniz spalter en flade op og sætter summen af de enkelte deles momenter, med hensyn til en given ret linie, lig med hele fladens moment med hensyn til den givne linie. F.eks. tager han i et rektangel ABCD (figur 17) momenter med hensyn til linien AD og starter med relationen

$$\text{Moment ABCEA} = \text{Moment ABCD} - \text{Moment ADCEA} \quad ,$$

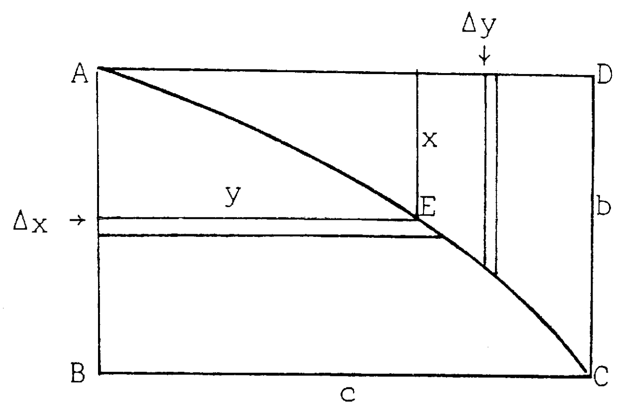
det første og det sidste moment spaltes igen op; derved opnår han relationen (når AB = DC = b og AD = BC = c)

$$\text{omn.}\ \overline{yx\ adx} \sqcap \frac{b^2c}{2} - \text{omn.}\ \overline{\frac{x^2}{2}\, ady} \ . \qquad (19.1)$$

Vi bemærker, at Leibniz som lighedstegn her benytter $\sqcap$, overstregningerne er hans parenteser, og *ad* (til) tilkendegiver, hvilken variabel, der summeres over. Relationen (19.1) svarer til

Leibniz' transformationer ved hjælp af momenter

$$\int_0^b yx\,dx = \frac{b^2c}{2} - \int_0^c \frac{x^2}{2}\,dy \quad . \tag{19.2}$$



Figur 17

Leibniz fandt i løbet af efteråret 1675 en række resultater af lignende art som (19.1), og også nogle hvori der indgår omn. taget to gange efter hinanden, f.eks. relationen

$$\text{omn. } \overline{x}\urcorner \;\sqcap\; x \text{ omn. } \ell - \text{omn.omn. } \ell \; . \tag{19.3}$$ Yl

Den kan "oversættes" ved

$$\int_0^x \ell(t)\cdot t\,dt = x\int_0^x \ell(t)\,dt - \int_0^x \int_0^u \ell(t)\,dt\,du \; .$$

20. Leibniz' indførelse af $\int$ og d

Den ovenfor anførte relation (19.3) findes i et manuskript fra den 29. oktober 1675, den efterfølges af bemærkningen

> N.B. I disse bemærkninger kan en lov, der dækker ting af samme art, bemærkes: thi hvis omn. sættes foran et tal eller en brøk, eller noget indefinit småt, så fremkommer der en ret linie; hvis omn. sættes foran en linie opnås en flade, og hvis foran en flade så et legeme, etc. i det uendelige.
>
> Det ville være nyttigt at skrive $\int$ i stedet for omn., således at
>
> $$\int \ell = \text{omn.}\,\ell \quad \text{eller summen af } \ell\text{'erne.}$$

Efter at have indført sit nye symbol $\int$ (et på den tid benyttet s) skrev Leibniz en del af sine tidligere fundne resultater om; f.eks. (19.3)

4-46

$$\int \overline{x\ell} = x\int \ell - \int\int \ell \ . \qquad (20.1)$$

Men han gav sig også straks til at fundere over, om han kunne finde en kalkyle for $\int$. Han bemærker, at hvis man kender $\int \ell$ kan man også umiddelbart bestemme ℓ, medens det omvendte ikke er tilfældet. Han finder det derfor formålstjenligt at starte med en undersφgelse af proceduren at komme fra $\int \ell$ til ℓ, i håb om at den kan kaste lys over den omvendte proces (stadig i manuskriptet fra 29. oktober 1675).

> Givet ℓ og dets relation til x, bestem $\int \ell$. Dette må opnås ved den omvendte kalkyle, det vil sige lad os antage, at $\int \ell = ya$ [a konstant]. Lad $\ell = \frac{ya}{d}$, så vil d formindske dimensionen, ligesom $\int$ forhφjer den. $\int$ betyder en sum og d en differens. For et givet y kan vi altid bestemme $\frac{y}{d}$ eller ℓ, dvs. differensen af y'erne.

Leibniz har hermed fået indfφrt d'et også, af dimensionsgrunde er det blevet sat i nævneren. Men allerede den 11. november 1675 satte han d foran den variabel, det virker på, og gjorde dermed d og dimensionslφse, så de blev at betragte som operatorer. Han havde dog i starten nogle besværligheder med at overskue d's egenskaber. Således fφlte han sig overbevist om, at der måtte gælde, at

$$d(xy) = (dx)(dy) \ . \qquad (20.2)$$

Efter i nogen tid at have prφvet at verificere (20.2), så han, at der deraf fφlger, at

$$\int dx \int dy = xy = \int d(xy) = \int (dx)(dy) \ , \qquad (20.3)$$

og da han anså relationen $\int dx \int dy = \int (dx)(dy)$ for at være absurd, opgav han (20.2). I fφrste omgang var han ikke i stand til at sætte noget andet i stedet for (20.2); i et manuskript fra juli 1677 findes den rigtige relation, dog uden bevis (det kan ikke udelukkes, at Leibniz har indset den tidligere).

Inden da havde Leibniz også fundet på at sætte d'et ind under $\int$, så han f.eks. skrev $\int ydy = \frac{1}{2}y^2$. I denne notation gemmer sig opfattelsen af dy som differensen mellem to uendeligt tætliggende y'er og $\int$ som en sum af stφrrelser med en uendelig lille bredde.

Det er ved at opfatte dx og dy som uendeligt små differenser, at Leibniz kan bevise den rigitge erstatning for (20.2). (Manuskript fra o. 1680, *Early Manuscripts*, p. 143):

> dxy er det samme som differensen mellem to efter hinanden fφlgende xy'er; lad den ene af disse være xy og den anden x + dx gange y + dy, så har vi

$$dxy = \overline{\overline{x + dx} \cdot \overline{y + dy}} - xy = xdy + ydx + dxdy ,$$

en udeladelse af dxdy, som er uendeligt lille i sammenligning med resten, da dx og dy er antaget at være uendeligt små (...), vil til rest give xdy + ydx.

Analogt finder Leibniz, at

$$d\,\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx} \quad . \qquad (20.4)$$

Argumentet for disse relationer er af samme art, som dem vi så hos Fermat og Newton, når de efter division med henholdsvis e og o, så bort fra led der endnu indeholdt disse størrelser.

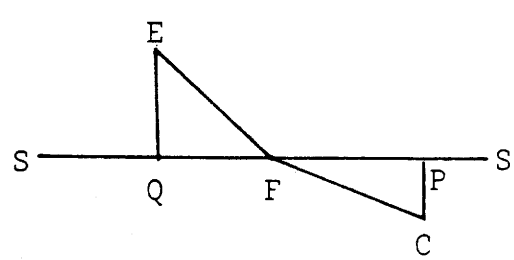
Det er værd at bemærke, at kvotienten $\frac{dy}{dx}$ ingen rolle spiller hos Leibniz, han regner med differentialer og ikke med differentialkvotienter.

21. Leibniz' første publikationer om differentialregningen

I *Acta Eruditorum* fra 1684 publicerede Leibniz sin første afhandling om differentialregningen. Han søgte i denne at undgå vanskelighederne med infinitesimale størrelser. Han gjorde det ved at lade dx være et fast liniestykke, og så definere dy ud fra relationen

$$\frac{t}{y} = \frac{dx}{dy} , \qquad (21.1)$$

når t er subtangenten til kurvepunktet (x,y). Alle sætninger om differentialer præsenterede han uden beviser, hvilket er forståeligt, da det ikke ville være enkelt at bevise f.eks. d(xy) = xdy + ydx ud fra denne definition. Leibniz lagde i afhandlingen stor vægt på den nytte, man har af differentialerne. Han viste f.eks., hvorledes man let ved hjælp af dem kan udlede brydningsloven.



Figur 18

4-48

Lad der være givet to medier, hvor det øverste har tæthed r og det nederste h. Lad SS være grænsen mellem medierne, og lad punkterne E og C være givet i hver sit medium (figur 18). Leibniz antager, at det punkt F på SS, hvor strålen mellem E og C rammer grænsen, er bestemt således, at tiden for at gennemløbe EF + FC er mindst mulig. Da punkterne E og C er givne, kendes længderne EQ: = e, CP: = c og QP: = p; endvidere sættes QF = x. Leibniz går ud fra, at lysets hastighed i et medium er omvendt proportional med mediets tæthed og finder da, at tiden for at gennemløbe EF + FC er proportional med w, hvor

$$w = r\sqrt{e^2+x^2} + h\sqrt{c^2+(p-x)^2} \quad . \tag{21.2}$$

"Da det står fast, at i tilfældet af et minimum er dw = o, bliver differentialligningen for denne ligning"

$$o = \frac{rxdx}{\sqrt{e^2+x^2}} - \frac{h(p-x)dx}{\sqrt{c^2+(p-x)^2}} \quad ; \tag{21.3}$$

altså skal F bestemmes af ligningen

$$\frac{rx}{\sqrt{e^2+x^2}} = \frac{h(p-x)}{\sqrt{c^2+(p-x)^2}} \quad . \tag{21.4}$$

Da $\frac{x}{\sqrt{e^2+x^2}}$ og $\frac{p-x}{\sqrt{c^2+(p-x)^2}}$ er sinus til henholdsvis ind- og udfaldsvinkel, viser (21.4), at brydningen sker så forholdet mellem sinus til ind- og udfaldsvinkel er lig med det omvendte forhold mellem mediernes tæthed.

Bortset fra et tilfælde - hvor Leibniz besvarede en kritik af sine differentialer - benyttede han ikke siden den definition af dem, som findes i 1684-artiklen. Leibniz' næste afhandling indeholdende differential- og integralregning kom i *Acta Eruditorum* i 1686. Den indeholder ingen egentlig definition af differentialer eller summer ($\int$'er), det fastslås blot, at d og $\int$ er reciprokke; men den giver dog indtrykket af, at dx betragtes som en infinitesimal størrelse. Det samme er tilfældet i alle Leibniz' senere afhandlinger på nær den ovennævnte.

Medens mange af Leibniz' samtidige troede på eksistensen af infinitesimaler, var Leibniz ikke selv overbevist om deres eksistens. Han betragtede dem snarere som fiktioner, der kunne bruges til udledelse af de algebraiske regler, differentialer opfylder (jvf. Bos [1], pp. 54 ff.). Han var i sine publicerede afhandlinger vag i fortolkningen af differentialer, og hans forklaringer skabte nok mere forvirring end opklaring. Specielt voldte de højere ordens differentialer, han indførte, hans samtid mange problemer. Det, der imidlertid var væsentligt for Leibniz, var at vise at hans *calculus* var en god *modus operandi*, og det lykkedes for ham.

22. Modtagelsen af Leibniz' *calculus*

Selvom Leibniz' tidlige afhandlinger om differentialregningen langt fra var en god introduktion til denne disciplin, gik der forbavsende kort tid, før den var anerkendt. Som tidligere nævnt spillede brødrene Bernoulli en væsentlig rolle i denne etablering; de korresponderede med Leibniz om forståelsen og anvendelsen af hans kalkyle og tog den hurtigt i brug til løsning af såvel matematiske som fysiske problemer. Det er forøvrigt også dem, der foreslog navnet integral til $\int$ istedet for Leibniz' sum.

I 1691 opholdt Johann Bernoulli sig i Paris og blev dér opfattet som ekspert i differentialregning. Den franske matematiker G. L'Hospital fik Bernoulli til at give sig undervisning i den (det fortælles traditionelt, at honoraret var stort), og denne fortsatte skriftligt efter at Bernoulli var rejst fra Paris. I 1696 havde L'Hospital lært så meget, at han kunne udgive den første samlede fremstilling af differentialregningen, *Analyse des infiniment petits*. Han vedkendte sig heri sin gæld til Johann Bernoulli (og til Jakob og Leibniz), men Johann havde alligevel svært ved at tage, at det var L'Hospital, der blev berømmet for denne meget anvendte lærebog, og gav tydeligt udtryk for det efter L'Hospitals død.

I kølvandet på differentialregningen kom differentialligningerne, som dukkede op enkeltvis i 1690'erne i forbindelse med konkrete matematiske og fysiske problemer. (Et egentligt forsøg på at systematisere dem finder vi først i Eulers *Institutiones calculi integralis* (1768)). Den fordel, det havde at finde løsningen til et problem som et integral til en differentialligning fremfor de traditionelle metoder, var givetvis medvirkende til at man accepterede Leibniz' *calculus*, selv om den indeholdt nogle grundlagsproblemer.

23. Afsluttende bemærkninger om Newtons og Leibniz' analyse

Foruden notationsforskelle hos Newton og Leibniz bemærker man en forskel i den måde, hvorpå begreberne indførtes.

Newton gik ud fra hastighed eller fluxion som noget intuitivt givet og introducerede integralet eller fluenten som det, vi i dag kalder en stamfunktion. I bestemmelserne af fluxioner var det forholdet mellem to fluxioner, Newton fandt, og han indrettede derefter sommetider opgaverne således, at den ene fluxion var 1. Endvidere benyttede Newton infinitesimale størrelser så lidt som muligt; der indgik i hans teori kun én, nemlig "en lille tidsforøgelse" o.

Leibniz startede med en sum og indførte differentialet som dets modstykke. I de videre studier af differentialer betragtede han dem som infinitesimaler, og det er disse og ikke en kvotient mellem to differentialer, han regnede med. Denne skik fortsatte, indtil Bernard Bolzano og Augustin-Louis Cauchy gjorde den afledede funktion svarende til differentialkvotienten til den centrale størrelse i differentialregningen.

Der rejste sig hurtigt megen kritik mod såvel Newtons som Leibniz' metoder. Newton havde sin skarpeste kritiker i filosoffen George Berkeley, der i 1734 udgav afhandlingen *The Analyst* med undertitlen

> *Wherein It is Examined Whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis Are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith. "First Cast the Beam Out of Thine Own Eye; and Then Shalt Thou See Clearly to Cast the Mote Out of Thy Brother's Eye".*

Berkeley benægtede hverken nytten eller gyldigheden af den nye gren af matematikken, og han angreb ikke matematikerne som beregnere, men som mænd af "Science and Demonstration". Han mente, med en vis ret, at de ikke havde givet nogen legitim begrundelse for deres fremgangsmåde. Om Newtons "oprindelige og finale" forhold sagde han, at de var lig med det ubestemmelige forhold $\frac{0}{0}$.

Leibniz blev kraftigst angrebet af den hollandske matematiker Bernard Nieuwentijt. Også han indrømmede rigtigheden af de nye metoders resultater, men følte som andre, at metoderne indeholdt mange dunkle punkter, og at deres måde at ræsonnere på let kunne føre til absurditeter. Sin største indvending havde Nieuwentijt mod Leibniz' højere ordens differentialer, og han prøvede konstruktivt at løse Leibniz' problemer uden brug af højere ordens differentialer. Det forsøg, i hvilket Nieuwentijt definerede infinitesimaler som størrelser, der er mindre end enhver given størrelse, kan dog ikke siges at være lykkedes.

Trods mange ihærdige forsøg på at reparere Newtons og Leibnis' fundament kom der til at gå et par hundrede år, før det lykkedes fuldtud. Men Newton og Leibniz havde forsynet matematikere og fysikere med et meget nyttigt redskab, som de med stor virtuositet benyttede og videreudviklede.

24. Nævnte personer

Archimedes (287?-212), græker

Barrow, Isaac (1630-1677), englænder

Berkeley, George (1685-1753), englænder

Bernoulli, Jakob (1654-1705), schweizer

Bernoulli, Johann (1667-1748), schweizer

Bolzano, Bernard (1781-1848), tjekker

Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857), franskmand

Cavalieri, Bonaventura (1598-1647), italiener

Descartes, René (1596-1650), franskmand

Eudoxos (1. halvdel af 4. årh. f.Kr.), græker

Euler, Leonhard (1707-1783), schweizer

Fermat, Pierre (1601-1665), franskmand

Galilei, Galileo (1564-1642), italiener

Hudde, Johann (1628-1704), hollænder

Huygens, Christiaan (1629-1695), hollænder

Kepler, Johann (1571-1630), tysker

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), tysker

L'Hospital, Guillaume (1661-1704), franskmand

Mersenne, Marin (1588-1648), franskmand

Newton, Isaac (1642-1727), englænder

Nieuwentijt, Bernard (1654-1718), hollænder

Pascal, Blaise (1623-1662), franskmand

Roberval, Gilles Personne (1602-1675), franskmand

Stevin, Simon (1548-1620), hollænder

Torricelli, Evangelista (1608-1647), italiener

Viète, François (1540-1603), franskmand

Wallis, John (1616-1703), englænder

Wren, Christopher (1632-1723), englænder.

41=52

25. Kilder

Archimedes: *The Works of Archimedes*, ed. T.L. Heath, Dover Publications.

Cavalieri, B.: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna 1635 (2. udg. 1653).

Cavalieri, B.: *Exercitationes geometricæ sex*, Bologna 1647.

Descartes, R.: *La Géométrie*, Leiden 1637, genoptrykt med engelsk oversættels Chicago 1925, New York 1954.

Descartes, R.: *Geometria* (ed. F. van Schooten), Leiden 1649, Amsterdam 1659 og senere.

Fermat, P.: *Oeuvres de Fermat*, ed. P. Tannery et C. Henry, 4 bind, Paris 1891-1912; *Supplément*, ed. C. Waard, Paris 1922.

Kepler, J.: *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz 1615, genoptrykt i to samlede udgaver af Keplers værker, og dele af den oversat til tysk.

Newton, I.: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, ed. D.T. Whiteside, 2 bind, London 1964-67.

Newton, I.: *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ed. D.T. Whiteside, I- , Cambridge 1967- .

Leibniz, W.G.: *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, ed. J.M. Child, London 1920.

Leibniz, W.G.: *Analysis des Unendlichen*, Leipzig 1908 (Ostwalds Klassiker).

Robervals afhandlinger findes i *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusq'à 1699*, VI, Paris 1730.

Stevin, S.: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E.J. Dijksterhuis, 5 bind, Amsterdam 1955.

Torricelli, E.: *Opere di Evangelista Torricelli*, ed. Gino Loria e G. Vassura 3 bind, Faenza 1919.

26. Sekundær litteratur

[1] Baron, M.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford 1969.

[1] Bos, H.J.M.: "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus", *Archive for History of Exact Sciences*, 14 (1974), pp. 1-90.

[1] Boyer, C.: *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1949 og senere.

Grattan-Guinness, I. (ed.): *From the calculus to the set theory, 1630-1910* (planlagt til at udkomme i 1978.

Hofmann, J.E.: *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris 1672-76*, München 1949; oversat til engelsk: *Leibniz in Paris 1672-1676*, Cambridge 1974.

Mahoney, M.S.: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princeton 1973.

[1] Whiteside, D.T.: "Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960), pp. 179-368.

Angående yderligere sekundær litteratur henvises til bibliografierne i ovenstående værker.