Supplerende noter til MM519

Matematikkens Historie

Efterårssemesteret 2010

Institut for Matematik og Datalogi.
v. Jessica Carter

Cauchy, Resumé des Lecons données a I'École Polytechnique sur le calcul infinitesimal, Paris 1823, oversat til engelsk af Judith V. Grabiner, i "The Origins of Cauchy's Rigorous Calulus", MIT Press 1981	3 sider
Cauchy, Lecons sur le calcul differential, Paris 1829	6 sider
Victor J. Katz, A History of Mathematics, HarperCollins 1993 ISBN 0-673-38039-4	1 side
E. Heine, Die Elemente der Functionenlehre, Journal Reine Angew. Math. 74 (1872)	7 sider
Lars Mejlbo, Delvis oversættelse af Lobatjevskij: Geometrisk Undersøgelse over Teorien for Parallelle Linier, Aarhus Universitet, Elementærafdeling Nr. 20, Januar 1988	26 sider
Saccheri: 'Euclid freed of all blemish', 1733	4 sider
Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal Reine Angew. Math 77 (1874)	4 sider
Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Jahresbericht der Deutsch. Mat. Vereing. I (1890-91)	4 sider

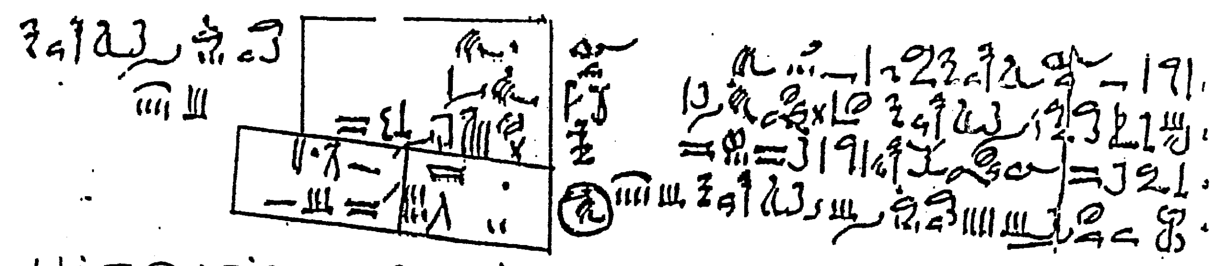
Classics of Mathemaitcs (editor Ronald Calinger), Prentice Hall 1995, side 137-145, 263-266 (12 sider)

Mathematische Werke - Dedekind, Chelsea 1969 20 sider

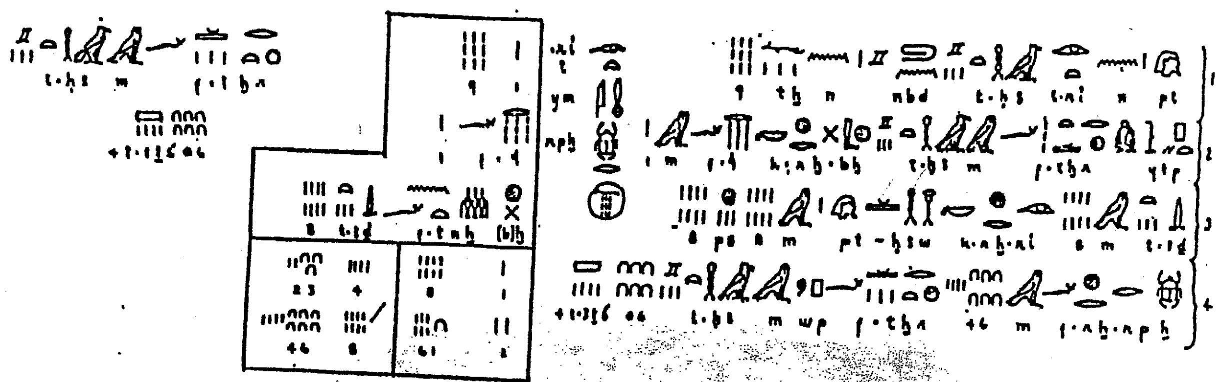
Indhold:

Dette notesæt er i sin tid blevet til i samarbejde med bl.a. Jesper Lützen, Kirsti Andersen og Torkil Heiede hvilket de skal have tak for.

OPGAVE 1   PAPYRUS RHIND   PROBLEM 50



HIERATISK SKRIFT



OVERSÆTTELSE TIL HIEROGLYFFER

Dens størrelse i areal er 60 setat 4.

1	9
$\bar{9}$ af det	1
Træk fra; resten er 8	

4	32	1	8
/ 8	64	2	16

Eksempel på at udregne en rund mark på 9 khet.

Hvad er dens størrelse i areal?

Du borttager 1/9 af det, nemlig 1; resten er 8.

Du udfører multiplikationen 8 gange 8; det bliver 64.

Dens størrelse i areal er 60 setat 4.

OVERSÆTTELSE TIL DANSK

Ovenstående viser problem 50 i Payprus Rhind fra ca. 1800 f.Kr.

1) Hvad-udregnes?

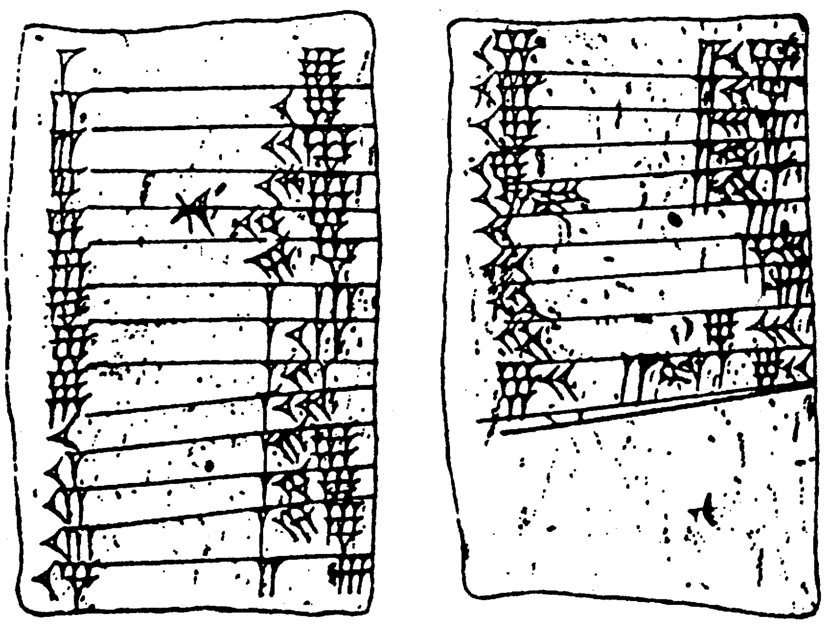
2) Hvad betyder de 9 khet ?

3) Hvordan udføres multiplikationen 8 x 8 ?

4) Prøv at bruge en lignende metode til at udføre multiplikationerne 8 x 7, 7 x 9 . Er metoden generelt anvendelig ?

Opgave 2

Forklar indholdet på følgende gammenbabyloniske lertavle fra ca. 1800 f.Kr.:



Opgave 3

Der er fundet mange eksempler på følgende tabel: (gl. babylonsk)

I	II	I	II	I	II
2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

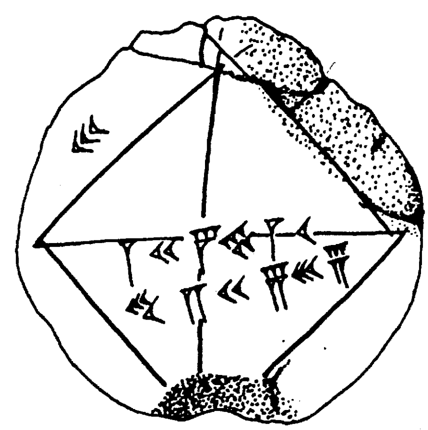
Hvad er det ?

Diskuter, hvordan man kan bruge denne tabel sammen med en række multiplikationstabeller til at udføre divisioner $\frac{a}{b}$. Hvorfor

mon 7 og 11 mangler i tabellen ?
Argumenter, ud fra opgave ~~4~~ 3 for, at babylonierne faktisk udførte divisioner på denne måde. Når multiplikationstabellerne skal bruges til sådanne udregninger, har man ikke alene brug for en to-tabel, en tre-tabel osv., men også for en 7,30 tabel og ni-tabellen ovenfor er en del af en sådan serie. På sidste linie står der således, at den næste tabel i serien er en 8,20 tabel.

Opgave 4

Lertavlen YBC 7289 [Neugebauer og Sachs 1945, p. 42] ser sådan ud:



Giv en forklaring af tavlens indhold.

Opgave 5

Der findes mange måder til at approximere kvadratroden af et positivt reelt tal. Her gives en som nok var kendt af grækerne.

Gæt først på en værdi b_1.

1) Vis at

$$b_1 > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{b_1} < \sqrt{a}$$

$$b_1 < \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{b_1} < \sqrt{a}$$

Som næste approximation vælges middelværdien

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{a}{b_1}\right)$$

2) Vis at b_2 altid er større end $\sqrt{a}$ og dermed $\frac{a}{b_2}$ mindre end $\sqrt{a}$.

Som tredie approximation vælges

$$b_3 = \frac{1}{2}\left(b_2 + \frac{a}{b_2}\right)$$

og så videre.

3) Kan det tænkes at tallene på lertavlen i opgave ~~5~~ 4 er udpeget på denne måde ?

Opgave 6

1) To størrelser a og b siges at være kommensurable hvis de har et fælles mål (i.e. der findes en størrelse d så $a = nd$ og $b = md$, $m,n \in \mathbb{N}$) . Overvej at to størrelser er kommensurable hvis og kun hvis deres Euklids algoritme

$$a = n_1 b + r_1 \,, \quad r_1 < b$$

$$b = n_2 r_1 + r_2 \,, \quad r_2 < r_1$$

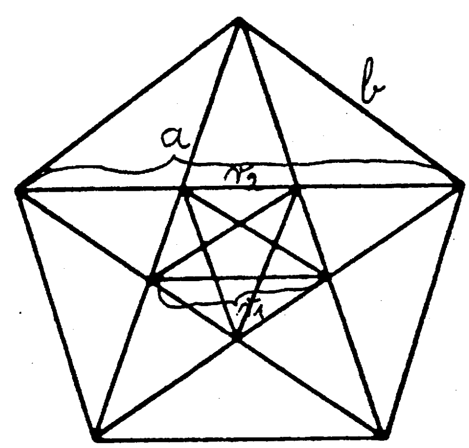
$$r_1 = n_3 r_2 + r_3 \,, \quad r_3 < r_2$$

$$r_{k-2} = n_k r_{k-1} + r_k \,, \quad r_k < r_{k-1}$$

$$* \qquad r_{k-2} = n_{k+1} r_k$$

ender efter et endeligt antal skridt, d.v.s. at der efter et endeligt antal skridt kommer en rest der er nul (som i * ovenfor). Størrelsen r_k er da a og b's største mål.

2) Brug ovenstående karakterisering af kommensurabilitet til at vise at siden og diagonalen i en regulær femkant er inkommensurable



Vink: Vis at resterne r_1 og r_2 i Euklids algoritme ligger som vist på figuren.

3) Bevis at

$$a/_b = b/_{(a-b)}$$

4) Man siger at AB er delt i det gyldne snit i C eller at $a/_b$ er det gyldne snit.
Udregn det gyldne snit $a/_b$ i tal.

Opgave 7. Sætninger fra den 'geometriske algebra'.

Der bringes nogle eksempler fra Euklids Elementer bog II på geometriske sætninger, som har været brugt algebraisk - dvs. når man skulle regne i geometrien. Til den første sætning er beviset medtaget, så man kan se, hvor omhyggelig Euklid var.

i) gengiv de geometriske argumenter i sætning II.4.

ii) 'oversæt' et passende antal af sætningerne II.4 - II. til algebra. Kan du finde flere 'oversættelser' til samme sætning?

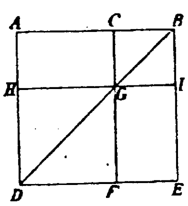
4.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Kvadratet paa hele Linien lig Summen af Kvadraterne paa Stykkerne og to Gange det Rektangel, der indesluttes af Stykkerne.

Lad nemlig den rette Linie AB være delt vilkaarligt i C. Jeg siger da: □AB = □AC + □CB + 2▭AC, CB.

Lad der nemlig paa AB være tegnet et Kvadrat ADEB, lad BD være dragen, lad CF være trukken gennem C parallel med AD eller EB, og lad HI være trukken gennem G parallel med AB eller DE.

Da nu CF er parallel med AD, og BD har skaaret dem, er den udvendige Vinkel CGB lig den indvendige og modstaaende Vinkel ADB;[7] og ∠ADB er lig ∠ABD, fordi Side BA er lig Side AD;[8] altsaa er ∠CGB = ∠GBC; følgelig er Side BC lig Side CG.[9] Men CB er lig GI; og CG er lig IB; altsaa er GI = IB. Altsaa er CGIB ligesidet. Endvidere siger jeg, at den ogsaa er retvinklet. Thi da CG er parallel med BI, saa er ∠IBC + ∠GCB lig to rette; og ∠IBC er ret; altsaa er ∠BCG ogsaa ret; følgelig ere de modstaaende Vinkler CGI og GIB ogsaa rette. Altsaa er CGIB retvinklet. Men det blev ogsaa bevist, at den er ligesidet. Altsaa er den et Kvadrat; og den er □CB. Af samme Grund er HF ogsaa et Kvadrat; og den er □HG, det vil sige □AC. Altsaa ere HF og IC □AC og □CB. Og da AG er lig GE, og AG er ▭AC, CB, thi GC er lig CB, saa er GE = ▭AC, CB. Altsaa er AG + GE = 2▭AC, CB. Desuden ere Kvadraterne HF og CI □AC og □CB. Altsaa ere de fire HF + CI + AG + GE = □AC + □CB + 2▭AC, CB. Men HF + CI + AG + GE er hele ADEB, som er □AB. Altsaa er □AB = □AC + □CB + 2▭AC, CB.



Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Kvadratet paa hele Linien lig Summen af Kvadraterne paa Stykkerne og to Gange det Rektangel, der indesluttes af Stykkerne; h. s. b.

7. Ifølge I.29 gælder det, at når en linie skærer to parallelle linier, er ensliggende vinkler lige store.

8. Ifølge sætning I.5 er grundvinklerne i en ligebenet trekant lige store.

9. Og i sætning I.6 er det vist, at hvis vinklerne ved grundlinien er lige store, er trekanten ligebenet.

5.

Naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er det Rektangel, der indesluttes af hele Liniens uligestore Stykker, samt Kvadratet paa Stykket mellem Delingspunkterne lig Kvadratet paa Halvdelen.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt i ligestore Stykker i C og i uligestore Stykker i D. Jeg siger da: $\square$ AD, DB + $\square$ CD = $\square$ CB.

6.

Naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, saa er det Rektangel, der indesluttes af hele Linien med dens Forlængelse og Forlængelsen, samt Kvadratet paa Halvdelen lig Kvadratet paa den rette Linie, der er sammensat af Halvdelen og Forlængelsen.

Lad nemlig en ret Linie være halveret i Punktet C, og lad en ret Linie BD være afsat i Forlængelse af den. Jeg siger da: $\square$ AD, DB + $\square$ CB = $\square$ CD.

7.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien og paa det ene Stykke lig Summen af to Gange det Rektangel, der indesluttes af hele Linien og Stykket, og Kvadratet paa det andet Stykke.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt vilkaarligt i Punktet C. Jeg siger da: $\square$ AB + $\square$ BC = 2 $\square$ AB, BC + $\square$ CA.

8.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er fire Gange det Rektangel, der indesluttes af hele Linien og et af Stykkerne samt Kvadratet paa det andet Stykke lig det Kvadrat, der er tegnet paa hele Linien og det første Stykke ud i eet.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt vilkaarligt i Punktet C. Jeg siger da: 4 $\square$ AB, BC + $\square$ AC er lig det Kvadrat, der er tegnet paa AB, BC ud i eet.

9.

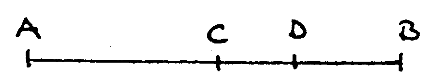
Naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er Summen af Kvadraterne paa hele Liniens uligestore Stykker dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa Stykket mellem Delingspunkterne.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt i ligestore Stykker i C og i uligestore Stykker i D. Jeg siger da: $\square$ AD + $\square$ DB = 2 $\square$ AC + 2 $\square$ CD.

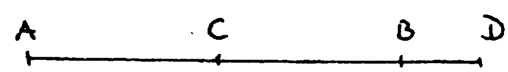
10.

Naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien med dens Forlængelse og paa Forlængelsen dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa den rette Linie, der er sammensat af Halvdelen og Forlængelsen ud i eet.

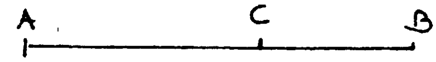
Lad nemlig en ret Linie AB være halveret i Punktet C, og lad en ret Linie BD være afsat i Forlængelse af den. Jeg siger da: $\square$ AD + $\square$ DB = 2 $\square$ AC + 2 $\square$ CD.



Sætning 5 og 9



Sætning 6 og 10



Sætning 7 og 8

Opgave 8. Anvendelse af den geometriske algebra: Konstruktion af detgyldne snit.

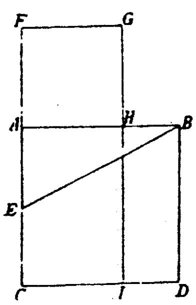
1) Referer sætning II.11.
2) Benyt konstruktionen til at konstruere en regulær femkant.

11.

At dele en given ret Linie saaledes, at det Rektangel, der indesluttes af hele Linien og det ene af Stykkerne, er lig Kvadratet paa det andet Stykke.

Lad AB være den givne rette Linie. Man skal da dele den saaledes, at det Rektangel, der indesluttes af hele Linien og det ene af Stykkerne, er lig Kvadratet paa det andet Stykke.

Lad der nemlig paa AB være tegnet et Kvadrat ABDC, lad AC være halveret i Punkt E, lad BE være dragen, lad CA være fortsat til F, lad EF være afsat lig BE, lad der paa AF være tegnet et Kvadrat FH, og lad GH være fortsat til I. Jeg siger da, at AB er delt i H saaledes, at ▭ AB, BH er lig □ AH.



Thi da den rette Linie AC er halveret i E, og FA er afsat i Forlængelse af den, saa er ▭ CF, FA + □ AE = □ EF. Nu er EF = EB; altsaa er ▭ CF, FA + □ AE = □ EB. Men □ BA + □ AE er lig □ EB, thi Vinkelen ved A er ret; altsaa er ▭ CF, FA + □ AE = □ BA + □ AE. Lad det fælles Kvadrat paa AE være trukket fra, saa er Resten ▭ CF, FA = □ AB. Men ▭ CF, FA er FI, thi AF er lig FG, og □ AB er AD; altsaa er FI = AD. Lad det fælles Rektangel AI være trukket fra, saa er Resten FH = HD. Men HD er ▭ AB, BH, thi AB er lig BD; og FH er □ AH; altsaa er ▭ AB, BH = □ HA.

Altsaa er den givne rette Linie AB delt i H saaledes, at ▭ AB, BH er lig □ HA; h. s. g.

Opgave 9

Nedenfor gengives indledningen til Descarte's La Geomêtrie i en engelsk oversættelse af D.E. Smith og M.L. Latham (Dover Publications 1954). Her viser Descartes hvordan man geometrisk kan udføre operationer med liniestykker, som svarer til de algebraiske operationer +,-,.,: og $\sqrt{\ }$. Sammenlign med den græske geometriske algebra og udpeg én bestemt størrelse hos Descartes, som ikke findes hos grækerne.
Hvad handler "La Géomêtrie" ifølge Descartes' indledning om ?

The Geometry of René Descartes

BOOK I

Problems the Construction of Which Requires Only Straight Lines and Circles

ANY problem in geometry can easily be reduced to such terms that a knowledge of the lengths of certain straight lines is sufficient for its construction.[1] Just as arithmetic consists of only four or five operations, namely, addition, subtraction, multiplication, division and the extraction of roots, which may be considered a kind of division, so in geometry, to find required lines it is merely necessary to add or subtract other lines; or else, taking one line which I shall call unity in order to relate it as closely as possible to numbers,[2] and which can in general be chosen arbitrarily, and having given two other lines, to find a fourth line which shall be to one of the given lines as the other is to unity (which is the same as multiplication); or, again, to find a fourth line which is to one of the given lines as unity is to the other (which is equivalent to division); or, finally, to find one, two, or several mean proportionals between unity and some other line (which is the same as extracting the square root, cube root, etc., of the given line.[3] And I shall not hesitate to introduce these arithmetical terms into geometry, for the sake of greater clearness.

For example, let AB be taken as unity, and let it be required to multiply BD by BC. I have only to join the points A and C, and draw DE parallel to CA; then BE is the product of BD and BC.

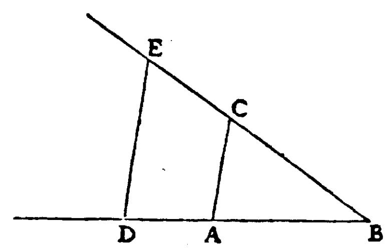
If it be required to divide BE by BD, I join E and D, and draw AC parallel to DE; then BC is the result of the division.

If the square root of GH is desired, I add, along the same straight line, FG equal to unity; then, bisecting FH at K, I describe the circle FIH about K as a center, and draw from G a perpendicular and extend it to I, and GI is the required root. I do not speak here of cube root, or other roots, since I shall speak more conveniently of them later.

Often it is not necessary thus to draw the lines on paper, but it is sufficient to designate each by a single letter. Thus, to add the lines BD and GH, I call one a and the other b, and write $a+b$. Then $a-b$ will indicate that b is subtracted from a; ab that a is multiplied by b; $\frac{a}{b}$ that a is divided by b; aa or a^2 that a is multiplied by itself; a^3 that this result is multiplied by a, and so on, indefinitely.[4] Again, if I wish to extract the square root of a^2+b^2, I write $\sqrt{a^2+b^2}$; if I wish to extract the cube root of $a^3-b^3+ab^2$, I write $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$, and similarly for other roots.[5] Here it must be observed that by a^2, b^3, and similar expressions, I ordinarily mean only simple lines, which, however, I name squares, cubes, etc., so that I may make use of the terms employed in algebra.[6]

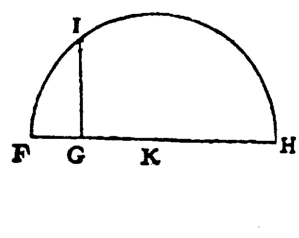
298 LA GEOMETRIE.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou er trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proporti nelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſ meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. E ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithme que en la Geometrie, affin de me rendre plus int ligibile.



Soit par exem AB l'vnité, & qu'il f le multiplier BD B C, ie n'ay qu'a ioin les poins A & C, puis rer DE parallele a C & BE eſt le produit cete Multiplication.

Oubien s'il faut diuiſer BE par BD, ayant ioint poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC eſ produit de cete diuiſion.



Ou s'il faut tirer la raci quarrée de GH, ie luy a iouſte en ligne droite F qui eſt l'vnité, & diuiſant F en deux parties eſgales point K, du centre K ie

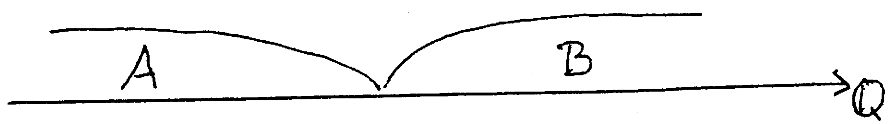
Opgave 10

Nedenfor følger vi Dedekinds konstruktion (1872) af de reelle tal ud fra de rationale tal.
Vi forestiller os at vi har de rationale tal $\mathbb{Q}$ og ønsker at konstruere de relle tal $\mathbb{R}$.

Definition
Et Dedekind-snit (A, B) i $\mathbb{Q}$ er et par af delmængder A, B af $\mathbb{Q}$ som opfylder

1) $\mathbb{Q} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$
2) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
3) $\forall x \in A, \forall y \in B: x < y$.

Vi kan altså illustrere Dedekind-snittet (A, B) således:



Eksempler

1. $A_1 =]-\infty, 2]$, $B_1 =]2, \infty[$
2. $A_2 =]-\infty, 2[$, $B_2 = [2, \infty[$
3. $A_3 =]-\infty, q]$, $B_3 =]q, \infty[$ $q \in \mathbb{Q}$
4. $A_4 =]-\infty, q[$, $B_4 = [q, \infty[$ $q \in \mathbb{Q}$.

Bemærkning
Vi vil indentificere Dedekind-snittene 1. og 2. med tallet 2 og mere generelt 3 og 4 med det rationale tal q.

Eksempel
på et Dedekind-snit der ikke svarer til et rationalt tal

5. $A_5 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}$, $B_5 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$

(løst sagt skulle dette snit jo svare til $\sqrt{2}$ men det er ikke et rationalt tal).

De reelle tal

Nu kalder vi mængden af Dedekind-snit for $\mathbb{R}$ idet vi identificerer snit af typen 3, 4 ovenfor. Herved har vi konstrueret de reelle tal. Ja, vi kan naturligvis først rigtig tænke på dem som relle tal, når vi har udstyret $\mathbb{R}$ med så meget struktur, at den ligner det vi forstår ved $\mathbb{R}$. Nedenfor bedes I om at indføre en del af denne struktur.

1) Indfør en ordningsrelation $<$ på mængden af Dedekind-snit ($\mathbb{R}$) som er en udvidelse af ordningen på $\mathbb{Q}$. D.v.s. definer hvad $(A_1, B_1) < (A_2, B_2)$ skal betyde og vis at hvis Dedekind-snittene begge er af formen 3 eller 4 ovenfor (med rationale tal q_1, q_2) så svarer det til at $q_1 < q_2$.

2) Bevis at $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$, d.v.s. at der mellem to vilkårlige Dedekind-snit findes et af formen 3 eller 4 ovenfor.

3) Bevis at $\mathbb{R}$ er ordningskomplet (kontinuert i Dedekinds sprogbrug) d.v.s. at enhver opadtil begrænset mængde har et supremum (se Gutmann's noter til Mat 1 kap. III §2).

4) Indfør en addition på mængden af Dedekind snit ($\mathbb{R}$) som er en udvidelse af additionen på $\mathbb{Q}$.

5) Indfør subtraktion på $\mathbb{R}$ (og $-a$).

6) Vis den associative lov for $+$.

7) Indfør multiplikation på $\mathbb{R}$ (begynd evt. med at indføre multiplikationen på $\mathbb{R}_+$ (defineret passende)).

8) Overvej at $\mathbb{R}$ udgør et legeme (du behøver ikke gå i alle detaljer).

9. Vis at der om Dedekind snittet i Eksempel 5. gælder

$$(A_5, B_5) \cdot (A_5, B_5) = 2$$

Hermed ses at der er god mening i at kalde (A_5, B_5) for $\sqrt{2}$.

FAMØS

FAGBLAD FOR AKTUAR, MATEMATIK, ØKONOMI OG STATISTIK
6. ÅRGANG, NR 3 MARTS 1993

DISKRET MATEMATIK

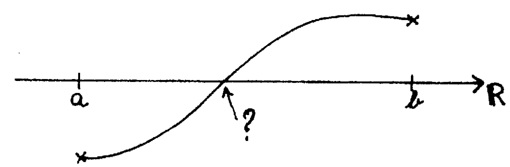
Opfandt Euklid de reelle tal?

JESPER LÜTZEN

Ved intensiv undervisning (indoktrinering) i folkeskolen er vi i dag opdraget til at synes, at de reelle tal er lige så naturlige som de naturlige tal. Endvidere mener de fleste nok, at tilordningen af de relle tal til punkterne på tallinien er en uproblematisk sag. Sådan har det imidlertid ikke altid været. I løbet af matematikkens lange historie har de irrationale tal voldt betydelige kvaler (det har de negative tal også men det er en anden historie), og strent taget har de reelle tal kun 120 år på bagen.

I midten af forrige århundrede var den matematiske analyse ved at få det udseende vi kender fra Mat 1. Cauchy havde gjort meget for at få grundlaget bragt i orden i sin *Cours d'Analyse* fra 1821, men flere af hans efterfølgere påpegede mangler bl.a. i argumentet for

MELLEMVÆRDISÆTNINGEN. *Hvis en kontinuert funktion på* $[a, b]$ *har* $f(a) < 0 < f(b)$ *så findes et* $x \in [a, b]$ *så* $f(x) = 0$.

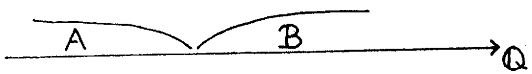


Tre matematikere fandt uafhængigt af hinanden ud af at problemet lå i beskrivelsen (eller definitionen) af de reelle tal – man kunne jo tænke sig at den reelle akse havde et hul netop der, hvor grafen for $f(x)$ krydser aksen. De tre matematikere, Dedekind, Weierstrass og Méray, der alle forestod den indledende analyseundervisning ved deres universitet fandt også samme løsning på problemet, nemlig en konstruktion af de reelle tal.

Méray udgav sine ideer i 1869 og 1872, men de blev overset. Weierstrass, derimod, udgav intet om emnet, men hans forelæsninger ved Berlins Universitet trak mange studerende til, og i 1872 udgav to af hans tidligere elever Heine og Cantor omarbejdede versioner af Weierstrass' konstruktion. Dette fik også Dedekind til samme år at udgive en konstruktion som han havde fundet på allerede i 1858. Méray, Heine og

1-11

Cantor (og til en vis grad Weierstrass) indførte $\mathbf{R}$ ved hjælp af Cauchy følger af rationale tal – i stil med Mat 2AL. Dedekind, derimod, benyttede snit i de rationale tal (de såkaldte Dedekind snit). Han var kommet på denne ide ved at analysere forskellen på den geometriske linie og de rationale tal. Han bemærkede at linien var kontinuert i den forstand, at hvis den er delt i to mængder A og B, hvor alle elementer i A ligger til venstre for alle elementer i B, så vil der netop være ét punkt på linien der skiller A og B.



Denne egenskab kaldte han *kontinuitetsegenskaben* (vi vil nok snarere kalde den fuldstændighedsegenskaben). Egenskaben deles ikke af de rationale tal. Hvis $\mathbf{Q}$ er delt i to mængder A, B der opfylder at

$$\mathbf{Q} = A \cup B\,,\ A \neq \emptyset\,,\ B \neq \emptyset \ \text{ og } \ a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a < b$$

så kaldes parret (A, B) et snit i $\mathbf{Q}$. Da $\sqrt{2}$ er irrationalt (det vidste allerede de gamle grækere), vil snittet $(A, \mathbf{Q} \setminus A)$, hvor

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}\,,$$

ikke adskilles af et tal i $\mathbf{Q}$, dvs. der findes intet tal $q \in \mathbf{Q}$ så at $x \leq q \leq y$ for alle $x \in A$ og alle $y \in \mathbf{Q} \setminus A$.

Ethvert rationalt tal q definerer naturligvis to snit $(A, \mathbf{Q} \setminus A)$, hvor $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < q\}$ eller $A = \{x \in Q \mid x \leq q\}$. Til disse knyttede Dedekind tallet q. Hvis et snit (A, B) ikke på denne måde er defineret ved et tal $q \in \mathbf{Q}$, så knyttede Dedekind et nyt symbol til det, og kaldte dette symbol et irrationalt tal. Hermed havde han skabt de reelle tal $\mathbf{R}$. I dag følger man i stedet Heinrich Weber, og siger, at snittet selv *er* det reelle tal.

Dedekind indførte nu en ordning på disse reelle tal, og viste, at hvis man danner snit i de reelle tal, så vil ethvert sådant snit $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ være frembragt af et reelt tal, der skiller de to mængde $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$. Vi har altså fået fyldt hullerne (som f.eks. $\sqrt{2}$) ud i $\mathbf{Q}$, og har fået en kontinuert mængde i lighed med den geometriske linie. Dedekind definerede også de almindelige regneoperationer, og viste at $\mathbf{R}$ er et legeme.

I 1876 satte Lipschitz imidlertid spørgsmålstegn ved nyheden af Dedekinds konstruktion. Han skrev til Dedekind:

> **"Jeg må nu tilstå at jeg ikke vil benægte berettigelsen af Deres definition, men at jeg er af den mening at den kun adskiller sig i formen men ikke i indholdet fra det som de gamle [grækere] har fastslået. Jeg kan kun sige at jeg anser definition 4 i Euklids V. bog... og det der følger efter for at være lige så tilfredsstillende som Deres definition".**

Dedekind prøvede dog at overbevise Lipschitz om at hans teori var noget helt andet end Euklids, men de to herrer blev aldrig enige.

Hvad var det da Euklid skrev i sine Elementer allerede ca. 300 f.Kr.? Ja, først skal det fastslås, at indholdet i Elementernes femte bog nok skyldes den lidt tidligere Eudoxos. Hans teori, den såkaldte størrelseslære, omhandler hvordan man kan arbejde med (geometriske) størrelser, og især med forhold imellem dem. Dette var nemlig blevet problematiseret ca. et århundrede tidligere, da Pythagoræerne opdagede, at der findes inkommensurable (usammenmålelige) størrelser. For eksempel vidste grækerne, at siden s og diagonalen d i et kvadrat er inkommensurable, så forholdet s/d ikke kan udtrykkes som et forhold n/m mellem to hele tal. Dette betyder altså at siden og diagonalen ikke begge kan måles ved hele (eller rationale tal). I vore dage opfinder vi (som Dedekind) nye tal (f.eks. $\sqrt{2}$) til at komme uden om dette problem, men grækerne konkluderede at geometriske størrelser ikke kunne behandles ved hjælp af måltal. I stedet måtte de behandles rent geometrisk. I forbindelse med ligedannede figurer er det dog praktisk at kunne danne forhold mellem f.eks. to liniestykker a og b, og have mulighed for at sige, at dette forhold er lig med forholdet mellem to andre størrelser c og d. Det er præcist dette som Euklids femte bog handler om. Den centrale definition 5 siger i Thyra Eibes oversættelse:

> Størrelser siges at være i *samme Forhold:* den første til den anden som den tredje til den fjerde, naar samme, men vilkaarlige Mangefold af den første og tredje enten begge to hver for sig er større end, eller begge to hver for sig er lig med, eller begge to hver for sig er mindre end henholdsvis samme, men vilkaarlige Mangefold af den anden og fjerde.

Dette lyder nok umiddelbart ret uforståeligt, og ligheden med Dedekinds snit er ikke slående. Men lad os oversætte definitionen til formelsprog. Hvis vi kalder de fire størrelser for a, b, c og d fås følgende definition af

1-12

ligheden $a/b = c/d$:

$$\forall m, n \in \mathbf{N} : \begin{cases} (ma > nb \wedge mc > nd) \vee \\ (ma = nb \wedge mc = nd) \vee \\ (ma < nb \wedge mc = nd) \ . \end{cases}$$

Hvis vi nu meget imod græsk tankegang dividerer over kors får vi:

$$\forall \frac{n}{m} \in \mathbf{Q}_+ : \begin{cases} (\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \wedge \frac{c}{d} > \frac{n}{m}) \vee \\ (\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \wedge \frac{c}{d} = \frac{n}{m}) \vee \\ (\frac{a}{b} < \frac{n}{m} \wedge \frac{c}{d} < \frac{n}{m}) \end{cases}$$

Og nu kan vi nok se ligheden med Dedekind snittene. a/b og c/d siges jo her at være ens hvis de deler de rationale tal n/m på samme måde, i.e. laver samme snit i **Q**. På samme måde svarer Euklids definition af $a/b > c/d$ til at der kan presses et rationalt tal ind imellem: $a/b > n/m > c/d$. Disse definitioner og den efterfølgende teori, er en af den græske matematiks højdepunkter.

Nu kan vi forstå hvad Lipschitz skrev til Dedekind. Men har han ret? Dette spørgsmål har været behandlet grundigt af matematikhistorikeren Oskar Bekker, og han når til svaret nej. For som Dedekind påpegede i sit svar til Lipschitz:

> "Euklid kan anvende sin definition på ens forhold på størrelser som *forekommer* i hans system, d.v.s. hvis eksistens er klar af gode grunde; og dette er helt tilstrækkeligt for Euklid. Hvis man imidlertid vil opbygge aritmetikken på begreberne om størrelsesforhold slår det slet ikke til".

Med andre ord: hvor Dedekind har *skabt* hele det reelle talunivers ud fra **Q**, så er Euklids definition kun en definition af lighed mellem forhold mellem geometriske størrelser som allerede findes. Man kan så spørge: Hvilke geometriske størrelser (f.eks. liniestykker) eksisterer da hos Euklid? Ja, det eneste sikre man kan sige om eksistens hos Euklid er, at når et liniestykke (eller en geometrisk figur) er konstrueret (med passer og lineal), så eksisterer den. Man kan derfor argumentere for at de størrelser som Euklid opererer med kun svarer til de konstruerbare tal, dvs. det mindste udvidelseslegeme af **Q** der er lukket over for kvadratrodsuddragning, (eller sagt mere simpelt, de tal der kan skrives ud fra **Q** ved hjælp af $+, -, \cdot, :$ og $\sqrt{\ }$). Disse tal er specielt algebraiske, så

der er kun tælleligt mange af dem; altså udgør de langt fra hele **R**. Det skal indrømmes at grækerne (f.eks. Archimedes), også talte om forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel svarende til π, så jeg har nok været for restriktiv ovenfor. Men det afgørende er, at man ikke kan argumentere for, at Euklid har alle de reelle tal (eller de tilhørende forhold) til sin rådighed, og at definition 5 ikke har til hensigt at skabe dem.

For den matematiske analyse er det afgørende at have alle de reelle tal til sin rådighed (på grund af fuldstændigheden), og dette opnås først med Dedekinds (og de andres) definition omkring 1870.

Et ekstra problem ved at opfatte bog V som en teori svarende til de relle tal er regneoperationerne. I det ovenstående har jeg rodet størrelser og forhold lidt sammen, men de har helt forskellig status hos Euklid. Størrelser kan adderes, men de kan ikke multipliceres; ja det vil sige, længder kan "multipliceres" og giver et rektangel, men da grækerne ikke anerkender fire dimensioner, kan to flader ikke ganges sammen. Forhold, derimod, adderes aldrig, men Euklid kan danne sammensatte forhold svarende til produktet. De reelle tals legemsstruktur findes altså slet ikke hos Euklid.

Det skal til slut bemærkes, at matematikerne før 1870 naturligvis opererede med reelle tal, men de havde ikke noget ordentligt grundlag for dem. Enten var de tilfredse med at arbejde rent formelt med dem (f.eks. med rodstørrelser), eller de sagde, at reelle tal kunne approksimeres vilkårligt godt med rationale tal. De mest omhyggelige matematikere så dog at der var et problem, og opererede med de reelle tal som geometriske størrelser baseret på Euklids bog V. Konstruktionen af **R** ud fra **Q** var således et vigtigt skridt i den proces som kaldes aritmetiseringen af analysen, som fjernede analysen fra geometrien. Dette skridt var især vigtigt fordi det omkring 1870 blev opdaget at geometrien, som den var opbygget hos Euklid, langt fra var så stringent opbygget som man havde troet. Faktisk viste det sig, at Hilbert i sin *Grundlagen der Geometrie* (1899), måtte indføre et kontinuitetsaksiom, som løseligt siger, at den geometriske linie netop er den reelle tallinie (f.eks. defineret ved hjælp af snit). Geometrien blev dermed bygget på tallene og ikke omvendt.

Litteratur: Oskar Becker. "Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung", Verlag Karl Alber Freiburg, München 1954.

1-13

morphismen beliebiger Körper und ihrer Zusammensetzung, Betrachtungen, die erst in neuester Zeit wieder aufgenommen wurden; durch Spezialisierung auf Galoissche Körper kommt er zur Automorphismengruppe. Diese Auffassung der Galoisschen Gruppe als Automorphismengruppe ist einer der Ausgangspunkte in der neueren Entwicklung der Algebra geworden; Dedekind hat sie schon in seinen Göttinger Vorlesungen 1857/58 entwickelt (vgl. Anm. *) S. 52). Dabei arbeitet Dedekind bei dem Fortsetzungssatz der Isomorphismen ohne Benutzung eines primitiven Elements, ein Umstand, der ihm die Übertragung auf unendliche Körper ermöglichte (XXXI); auch das ist erst in neuester Zeit allgemein in die Algebra eingedrungen.

Die Entwicklung der Idealtheorie läuft ganz ähnlich wie die der Körpertheorie; die ersten Fassungen sind allgemeiner, aber noch sehr kompliziert. Die erste Begründung der 2. Auflage (XLVII) spaltet den Zerlegungssatz in zwei Teile: das Ideal wird als kl. gem. Vielf. (Durchschnitt) von symbolischen Primidealpotenzen dargestellt; erst dann wird der Produktbegriff eingeführt und zu der üblichen Zerlegungsform übergegangen. Dabei wird aber schon bei der Durchschnittsdarstellung benutzt, daß es sich um die Hauptordnung handelt; die ganze Abgeschlossenheit wird wesentlich herangezogen.

Die 3. Auflage enthält ein Stück allgemeine Idealtheorie, die eindeutige Zerlegung der Ideale einer Ordnung in Primärideale (einartige Ideale). Der ausgeführte Beweis fand sich im Nachlaß mit dem Vermerk „für die dritte Auflage kassiert, doch wichtig" und ist jetzt an der betreffenden Stelle wieder eingefügt (XLIX). Daß nur in der Hauptordnung die ausnahmslose Darstellung der Primärideale als Potenzen von Primidealen gilt, ist dort (XLIX, § 172) klar ausgesprochen, ebenso, daß nur in der Hauptordnung ausnahmslos aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt; auch auf die Bedeutung der allgemeineren Idealtheorie ist hingewiesen. Bis auf diese Zufügungen ist der Aufbau aus der französischen Darstellung (XLVIII) übernommen, die im übrigen stärker als die übrigen Fassungen durch zahlreich eingefügte Beispiele den Charakter einer elementaren Einführung trägt.

Die 4. Auflage (XLVI) steht auf neuer Grundlage: sie stellt die Gruppeneigenschaft der ganzen und gebrochenen Ideale in den Vordergrund, indem auf Grund der ganzen Abgeschlossenheit — formal eingekleidet in einen allgemeinen Modulsatz — gezeigt wird, daß jedes Ideal ein eigentlicher (umkehrbarer) Modul ist. Diese Auffassung wollte Dedekind in einer nicht mehr zur Ausführung gekommenen 5. Auflage noch unterstreichen, dadurch, daß er von vornherein ganze und gebrochene Ideale seinen Definitionen zugrunde legte. Im übrigen plante er nach den vorgefundenen Notizen keine wesentliche Änderung des 11. Supplements, nur ein noch etwas stärkeres Hervorheben der formalen Modulidentitäten, im Anschluß an XXX.

Über die axiomatische Begründung der Idealtheorie, die überall durch Dedekindsche Gedankengänge beeinflußt ist, ist in den Erläuterungen zu XXV berichtet; die Begriffsbildungen des 11. Supplements durchziehen heute die ganze abstrakte Algebra.

Noether.

Dedekind.
Fra Gesammelte Mathematische Werke. Herausgegeben von Fricke Noether & Ore.
Chelsea Publishing Company, NY.
1969.

L.

Stetigkeit und irrationale Zahlen.

[Erste Auflage 1872. Fünfte Auflage 1927.]

Seinem geliebten Vater,
dem
Geh. Hofrat, Professor, Dr. jur. **Julius Levin Ulrich Dedekind**
in Braunschweig bei Gelegenheit seines funfzigjährigen Amts-Jubiläums
am 26. April 1872 gewidmet.

Inhalt.

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen. Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. Man sagt so häufig, die Differentialrechnung beschäftige sich mit den stetigen Größen, und doch wird nirgends eine Erklärung von dieser Stetigkeit gegeben, und auch die strengsten Darstellungen der Differentialrechnung gründen ihre Beweise nicht auf die Stetigkeit, sondern sie appellieren entweder mit mehr oder weniger Bewußtsein an geometrische, oder durch die Geometrie veranlaßte Vorstellungen, oder aber sie stützen sich auf solche Sätze, welche selbst nie rein arithmetisch bewiesen sind. Zu diesen gehört z. B. der oben erwähnte Satz, und eine genauere Untersuchung überzeugte mich, daß dieser oder auch jeder mit ihm äquivalente Satz gewissermaßen als ein hinreichendes Fundament für die Infinitesimalanalysis angesehen werden kann. Es kam nur noch darauf an, seinen eigentlichen Ursprung in den Elementen der Arithmetik zu entdecken und hiermit zugleich eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen. Dies gelang mir am 24. November 1858, und wenige Tage darauf teilte ich das Ergebnis meines Nachdenkens meinem teuren Freunde Durège mit, was zu einer langen und lebhaften Unterhaltung führte. Später habe ich wohl dem einen oder anderen meiner Schüler diese Gedanken über eine wissenschaftliche Begründung der Arithmetik auseinandergesetzt, auch hier in Braunschweig in dem wissenschaftlichen Verein der Professoren einen Vortrag über diesen Gegenstand gehalten, aber zu einer eigentlichen Publikation konnte ich mich nicht recht entschließen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil außerdem die Sache so wenig fruchtbar ist. Indessen hatte ich doch schon halb und halb

daran gedacht, dieses Thema zum Gegenstande dieser Gelegenheitsschrift zu wählen, als vor wenigen Tagen, am 14. März, die Abhandlung: „Die Elemente der Funktionenlehre“, von E. Heine (Crelles Journal, Bd. 74) durch die Güte ihres hochverehrten Verfassers in meine Hände gelangte und mich in meinem Entschlusse bestärkte. Dem Wesen nach stimme ich zwar vollständig mit dem Inhalte dieser Schrift überein, wie es ja nicht anders sein kann, aber ich will freimütig gestehen, daß meine Darstellung mir der Form nach einfacher zu sein und den eigentlichen Kernpunkt präziser hervorzuheben scheint. Und während ich an diesem Vorwort schreibe (20. März 1872), erhalte ich die interessante Abhandlung: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, von G. Cantor (Math. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. 5), für welche ich dem scharfsinnigen Verfasser meinen besten Dank sage. Wie ich bei raschem Durchlesen finde, so stimmt das Axiom in § 2 derselben, abgesehen von der äußeren Form der Einkleidung, vollständig mit dem überein, was ich unten in § 3 als das Wesen der Stetigkeit bezeichne. Welchen Nutzen aber die wenn auch nur begriffliche Unterscheidung von reellen Zahlgrößen noch höherer Art gewähren wird, vermag ich gerade nach meiner Auffassung des in sich vollkommenen reellen Zahlgebietes noch nicht zu erkennen.

§ 1.

Eigenschaften der rationalen Zahlen.

Die Entwicklung der Arithmetik der rationalen Zahlen wird hier zwar vorausgesetzt, doch halte ich es für gut, einige Hauptmomente ohne Diskussion hervorzuheben, nur um den Standpunkt von vornherein zu bezeichnen, den ich im folgenden einnehme. Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zählens, an, und das Zählen selbst ist nichts anderes als die sukzessive Schöpfung der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird; der einfachste Akt ist der Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauffolgenden neu zu erschaffenden. Die Kette dieser Zahlen bildet an sich schon ein überaus nützliches Hilfsmittel für den menschlichen Geist, und sie bietet einen unerschöpflichen Reichtum an merkwürdigen

Gesetzen dar, zu welchen man durch die Einführung der vier arithmetischen Grundoperationen gelangt. Die Addition ist die Zusammenfassung einer beliebigen Wiederholung des obigen einfachsten Aktes zu einem einzigen Akte, und aus ihr entspringt auf dieselbe Weise die Multiplikation. Während diese beiden Operationen stets ausführbar sind, zeigen die umgekehrten Operationen, die Subtraktion und Division, nur eine beschränkte Zulässigkeit. Welches nun auch die nächste Veranlassung gewesen sein mag, welche Vergleichungen oder Analogieen mit Erfahrungen, Anschauungen dazu geführt haben mögen, bleibe dahingestellt; genug, gerade diese Beschränktheit in der Ausführbarkeit der indirekten Operationen ist jedesmal die eigentliche Ursache eines neuen Schöpfungsaktes geworden; so sind die negativen und gebrochenen Zahlen durch den menschlichen Geist erschaffen, und es ist in dem System aller rationalen Zahlen ein Instrument von unendlich viel größerer Vollkommenheit gewonnen. Dieses System, welches ich mit R bezeichnen will, besitzt vor allen Dingen eine Vollständigkeit und Abgeschlossenheit, welche ich an einem anderen Orte*) als Merkmal eines Zahlkörpers bezeichnet habe, und welche darin besteht, daß die vier Grundoperationen mit je zwei Individuen in R stets ausführbar sind, d. h. daß das Resultat derselben stets wieder ein bestimmtes Individuum in R ist, wenn man den einzigen Fall der Division durch die Zahl Null ausnimmt.

Für unseren nächsten Zweck ist aber noch wichtiger eine andere Eigenschaft des Systems R, welche man dahin aussprechen kann, daß das System R ein wohlgeordnetes, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin unendliches Gebiet von einer Dimension bildet. Was damit gemeint sein soll, ist durch die Wahl der Ausdrücke, welche geometrischen Vorstellungen entlehnt sind, hinreichend angedeutet; um so notwendiger ist es, die entsprechenden rein arithmetischen Eigentümlichkeiten hervorzuheben, damit es auch nicht einmal den Anschein behält, als bedürfte die Arithmetik solcher ihr fremden Vorstellungen.

Soll ausgedrückt werden, daß die Zeichen a und b eine und dieselbe rationale Zahl bedeuten, so setzt man sowohl $a = b$ wie $b = a$. Die Verschiedenheit zweier rationaler Zahlen a, b zeigt sich darin, daß die Differenz $a - b$ entweder einen positiven oder einen

*) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet. Zweite Auflage. § 159.

negativen Wert hat. Im ersten Falle heißt a größer als b, b kleiner als a, was auch durch die Zeichen $a > b$, $b < a$ angedeutet wird*). Da im zweiten Falle $b - a$ einen positiven Wert hat, so ist $b > a$, $a < b$. Hinsichtlich dieser doppelten Möglichkeit in der Art der Verschiedenheit gelten nun folgende Gesetze.

I. Ist $a > b$, und $b > c$, so ist $a > c$. Wir wollen jedesmal, wenn a, c zwei verschiedene (oder ungleiche) Zahlen sind, und wenn b größer als die eine, kleiner als die andere ist, ohne Scheu vor dem Anklang an geometrische Vorstellungen dies kurz so ausdrücken: b liegt zwischen den beiden Zahlen a, c.

II. Sind a, c zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen b, welche zwischen a, c liegen.

III. Ist a eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems R in zwei Klassen, A_1 und A_2, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse A_1 umfaßt alle Zahlen a_1, welche $< a$ sind, die zweite Klasse A_2 umfaßt alle Zahlen a_2, welche $> a$ sind; die Zahl a selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die größte Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Klasse. In jedem Falle ist die Zerlegung des Systems R in die beiden Klassen A_1, A_2 von der Art, daß jede Zahl der ersten Klasse A_1 kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse A_2 ist.

§ 2.

Vergleichung der rationalen Zahlen mit den Punkten einer geraden Linie.

Die soeben hervorgehobenen Eigenschaften der rationalen Zahlen erinnern an die gegenseitigen Lagenbeziehungen zwischen den Punkten einer geraden Linie L. Werden die beiden in ihr existierenden entgegengesetzten Richtungen durch „rechts“ und „links“ unterschieden, und sind p, q zwei verschiedene Punkte, so liegt entweder p rechts von q, und gleichzeitig q links von p, oder umgekehrt, es liegt q rechts von p, und gleichzeitig p links von q. Ein dritter Fall ist unmöglich, wenn p, q wirklich verschiedene Punkte sind. Hinsichtlich dieser Lagenverschiedenheit bestehen folgende Gesetze.

*) Es ist also im folgenden immer das sogenannte „algebraische“ größer und kleiner Sein gemeint, wenn nicht das Wort „absolut“ hinzugefügt wird.

I. Liegt p rechts von q, und q wieder rechts von r, so liegt auch p rechts von r; und man sagt, daß q zwischen den Punkten p und r liegt.

II. Sind p, r zwei verschiedene Punkte, so gibt es immer unendlich viele Punkte q, welche zwischen p und r liegen.

III. Ist p ein bestimmter Punkt in L, so zerfallen alle Punkte in L in zwei Klassen, P_1, P_2, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse P_1 umfaßt alle die Punkte p_1, welche links von p liegen, und die zweite Klasse P_2 umfaßt alle die Punkte p_2, welche rechts von p liegen; der Punkt p selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden. In jedem Falle ist die Zerlegung der Geraden L in die beiden Klassen oder Stücke P_1, P_2 von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse P_1 links von jedem Punkte der zweiten Klasse P_2 liegt.

Diese Analogie zwischen den rationalen Zahlen und den Punkten einer Geraden wird bekanntlich zu einem wirklichen Zusammenhange, wenn in der Geraden ein bestimmter Anfangspunkt oder Nullpunkt o und eine bestimmte Längeneinheit zur Ausmessung der Strecken gewählt wird. Mit Hilfe der letzteren kann für jede rationale Zahl a eine entsprechende Länge konstruiert werden, und trägt man dieselbe von dem Punkte o aus nach rechts oder links auf der Geraden ab, je nachdem a positiv oder negativ ist, so gewinnt man einen bestimmten Endpunkt p, welcher als der der Zahl a entsprechende Punkt bezeichnet werden kann; der rationalen Zahl Null entspricht der Punkt o. Auf diese Weise entspricht jeder rationalen Zahl a, d. h. jedem Individuum in R, ein und nur ein Punkt p, d. h. ein Individuum in L. Entsprechen den beiden Zahlen a, b bzw. die beiden Punkte p, q, und ist $a > b$, so liegt p rechts von q. Den Gesetzen I, II, III des vorigen Paragraphen entsprechen vollständig die Gesetze I, II, III des jetzigen.

§ 3.

Stetigkeit der geraden Linie.

Von der größten Wichtigkeit ist nun aber die Tatsache, daß es in der Geraden L unendlich viele Punkte gibt, welche keiner rationalen Zahl entsprechen. Entspricht nämlich der Punkt p der rationalen Zahl a, so ist bekanntlich die Länge op kommensurabel mit der bei der Konstruktion benutzten unabänderlichen Längeneinheit, d. h. es gibt eine dritte Länge, ein sogenanntes gemeinschaftliches Maß, von welcher diese beiden Längen ganze Vielfache sind. Aber schon die alten Griechen haben gewußt und bewiesen, daß es Längen gibt, welche mit einer gegebenen Längeneinheit inkommensurabel sind, z. B. die Diagonale des Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist. Trägt man eine solche Länge von dem Punkt o aus auf der Geraden ab, so erhält man einen Endpunkt, welcher keiner rationalen Zahl entspricht. Da sich ferner leicht beweisen läßt, daß es unendlich viele Längen gibt, welche mit der Längeneinheit inkommensurabel sind, so können wir behaupten: Die Gerade L ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als das Gebiet R der rationalen Zahlen an Zahlindividuen.

Will man nun, was doch der Wunsch ist, alle Erscheinungen in der Geraden auch arithmetisch verfolgen, so reichen dazu die rationalen Zahlen nicht aus, und es wird daher unumgänglich notwendig, das Instrument R, welches durch die Schöpfung der rationalen Zahlen konstruiert war, wesentlich zu verfeinern durch eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, daß das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt, wie die gerade Linie.

Die bisherigen Betrachtungen sind allen so bekannt und geläufig, daß viele ihre Wiederholung für sehr überflüssig erachten werden. Dennoch hielt ich diese Rekapitulation für notwendig, um die Hauptfrage gehörig vorzubereiten. Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpft nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an — welcher aber selbst nirgends streng definiert wird — und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige*). Statt dessen fordere ich, daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. Daß solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden (doch ist dies bei der Einführung der komplexen Zahlen entschieden nicht der Fall gewesen);

*) Der scheinbare Vorzug der Allgemeinheit dieser Definition der Zahl schwindet sofort dahin, wenn man an die komplexen Zahlen denkt. Nach meiner Auffassung kann umgekehrt der Begriff des Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen erst dann klar entwickelt werden, wenn die irrationalen Zahlen schon eingeführt sind.

aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. So wie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, daß auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definiert werden. Nur das Wie? bleibt die Frage.

Die obige Vergleichung des Gebietes R der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der Erkenntnis der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben. Worin besteht denn nun eigentlich diese Stetigkeit? In der Beantwortung dieser Frage muß alles enthalten sein, und nur durch sie wird man eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung aller stetigen Gebiete gewinnen. Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusammenhang in den kleinsten Teilen ist natürlich nichts erreicht; es kommt darauf an, ein präzises Merkmal der Stetigkeit anzugeben, welches als Basis für wirkliche Deduktionen gebraucht werden kann. Lange Zeit habe ich vergeblich darüber nachgedacht, aber endlich fand ich, was ich suchte. Dieser Fund wird von verschiedenen Personen vielleicht verschieden beurteilt werden, doch glaube ich, daß die meisten seinen Inhalt sehr trivial finden werden. Er besteht im folgenden. Im vorigen Paragraphen ist darauf aufmerksam gemacht, daß jeder Punkt p der Geraden eine Zerlegung derselben in zwei Stücke von der Art hervorbringt, daß jeder Punkt des einen Stückes links von jedem Punkte des anderen liegt. Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“

Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, daß jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird; die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, daß

durch diese Trivialität das Geheimnis der Stetigkeit enthüllt sein soll. Dazu bemerke ich folgendes. Es ist mir sehr lieb, wenn jedermann das obige Prinzip so einleuchtend findet und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken. Hat überhaupt der Raum eine reale Existenz, so braucht er doch nicht notwendig stetig zu sein; unzählige seiner Eigenschaften würden dieselben bleiben, wenn er auch unstetig wäre. Und wüßten wir gewiß, daß der Raum unstetig wäre, so könnte uns doch wieder nichts hindern, falls es uns beliebte, ihn durch Ausfüllung seiner Lücken in Gedanken zu einem stetigen zu machen; diese Ausfüllung würde aber in einer Schöpfung von neuen Punktindividuen bestehen und dem obigen Prinzip gemäß auszuführen sein.

§ 4.

Schöpfung der irrationalen Zahlen.

Durch die letzten Worte ist schon hinreichend angedeutet, auf welche Art das unstetige Gebiet R der rationalen Zahlen zu einem stetigen vervollständigt werden muß. In § 1 ist hervorgehoben (III), daß jede rationale Zahl a eine Zerlegung des Systems R in zwei Klassen A_1, A_2 von der Art hervorbringt, daß jede Zahl a_1 der ersten Klasse A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 der zweiten Klasse A_2; die Zahl a ist entweder die größte Zahl der Klasse A_1, oder die kleinste Zahl der Klasse A_2. Ist nun irgendeine Einteilung des Systems R in zwei Klassen A_1, A_2 gegeben, welche nur die charakteristische Eigenschaft besitzt, daß jede Zahl a_1 in A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber eine solche Einteilung einen Schnitt nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen. Wir können dann sagen, daß jede rationale Zahl a einen Schnitt oder eigentlich zwei Schnitte hervorbringt, welche wir aber nicht als wesentlich verschieden ansehen wollen; dieser Schnitt hat außerdem die Eigenschaft, daß entweder unter den Zahlen der ersten Klasse eine größte, oder unter den Zahlen der zweiten Klasse eine kleinste existiert. Und umgekehrt, besitzt ein Schnitt auch diese Eigenschaft, so wird er durch diese größte oder kleinste rationale Zahl hervorgebracht.

Aber man überzeugt sich leicht, daß auch unendlich viele Schnitte existieren, welche nicht durch rationale Zahlen hervorgebracht werden. Das nächstliegende Beispiel ist folgendes.

Es sei D eine positive ganze Zahl, aber nicht das Quadrat einer ganzen Zahl, so gibt es eine positive ganze Zahl λ von der Art, daß

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

wird.

Nimmt man in die zweite Klasse A_2 jede positive rationale Zahl a_2 auf, deren Quadrat $> D$ ist, in die erste Klasse A_1 aber alle anderen rationalen Zahlen a_1, so bildet diese Einteilung einen Schnitt (A_1, A_2), d. h. jede Zahl a_1 ist kleiner als jede Zahl a_2. Ist nämlich $a_1 = 0$ oder negativ, so ist a_1 schon aus diesem Grunde kleiner als jede Zahl a_2, weil diese zufolge der Definition positiv ist; ist aber a_1 positiv, so ist ihr Quadrat $\leqq D$, und folglich ist a_1 kleiner als jede positive Zahl a_2, deren Quadrat $> D$ ist.

Dieser Schnitt wird aber durch keine rationale Zahl hervorgebracht. Um dies zu beweisen, muß vor allem gezeigt werden, daß es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat $= D$ ist. Obgleich dies aus den ersten Elementen der Zahlentheorie bekannt ist, so mag doch hier der folgende indirekte Beweis Platz finden. Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat $= D$ ist, so gibt es auch zwei positive ganze Zahlen t, u, welche der Gleichung

$$t^2 - D u^2 = 0$$

genügen, und man darf annehmen, daß u die kleinste positive ganze Zahl ist, welche die Eigenschaft besitzt, daß ihr Quadrat durch Multiplikation mit D in das Quadrat einer ganzen Zahl t verwandelt wird. Da nun offenbar

$$\lambda u < t < (\lambda + 1) u$$

ist, so wird die Zahl

$$u' = t - \lambda u$$

eine positive ganze Zahl, und zwar kleiner als u. Setzt man ferner

$$t' = D u - \lambda t,$$

so wird t' ebenfalls eine positive ganze Zahl, und es ergibt sich

$$t'^2 - D u'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - D u^2) = 0,$$

was mit der Annahme über u im Widerspruch steht.

Mithin ist das Quadrat einer jeden rationalen Zahl x entweder $< D$ oder $> D$. Hieraus folgt nun leicht, daß es weder in der Klasse A_1 eine größte, noch in der Klasse A_2 eine kleinste Zahl gibt. Setzt man nämlich

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

so ist

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

und

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Nimmt man hierin für x eine positive Zahl aus der Klasse A_1, so ist $x^2 < D$, und folglich wird $y > x$, und $y^2 < D$, also gehört y ebenfalls der Klasse A_1 an. Setzt man aber für x eine Zahl aus der Klasse A_2, so ist $x^2 > D$, und folglich wird $y < x$, $y > 0$ und $y^2 > D$, also gehört y ebenfalls der Klasse A_2 an. Dieser Schnitt wird daher durch keine rationale Zahl hervorgebracht.

In dieser Eigenschaft, daß nicht alle Schnitte durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, besteht die Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des Gebietes R aller rationalen Zahlen.

Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen; wir werden sagen, daß die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt. Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl und wir sehen zwei Zahlen stets und nur dann als verschieden oder ungleich an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen.

Um nun eine Grundlage für die Anordnung aller reellen, d. h. aller rationalen und irrationalen Zahlen zu gewinnen, müssen wir zunächst die Beziehungen zwischen irgend zwei Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2) untersuchen, welche durch irgend zwei Zahlen α und β hervorgebracht werden. Offenbar ist ein Schnitt (A_1, A_2) schon vollständig gegeben, wenn eine der beiden Klassen, z. B. die erste A_1, bekannt ist, weil die zweite A_2 aus allen nicht in A_1 enthaltenen rationalen Zahlen besteht, und die charakteristische Eigenschaft einer solchen ersten Klasse A_1 liegt darin, daß sie, wenn die Zahl a_1 in ihr enthalten ist, auch alle kleineren Zahlen als a_1 enthält. Vergleicht man nun zwei solche erste Klassen A_1, B_1 miteinander, so kann es 1. sein, daß sie vollständig identisch sind, d. h. daß jede in A_1 enthaltene Zahl a_1 auch in B_1, und daß jede in B_1 enthaltene Zahl b_1 auch in A_1 enthalten ist. In diesem Falle ist dann notwendig auch A_2 identisch mit B_2, die beiden Schnitte sind vollständig identisch, was wir in Zeichen durch $\alpha = \beta$ oder $\beta = \alpha$ andeuten.

Sind aber die beiden Klassen A_1, B_1 nicht identisch, so gibt es in der einen, z. B. in A_1, eine Zahl $a_1' = b_2'$, welche nicht in der anderen B_1 enthalten ist, und welche sich folglich in B_2 vorfindet; mithin sind gewiß alle in B_1 enthaltenen Zahlen b_1 kleiner als diese Zahl $a_1' = b_2'$, und folglich sind alle Zahlen b_1 auch in A_1 enthalten.

Ist nun 2. diese Zahl a_1' die einzige in A_1, welche nicht in B_1 enthalten ist, so ist jede andere in A_1 enthaltene Zahl a_1 in B_1 enthalten, und folglich kleiner als a_1', d. h. a_1' ist die größte unter allen Zahlen a_1, mithin wird der Schnitt (A_1, A_2) durch die rationale Zahl $\alpha = a_1' = b_2'$ hervorgebracht. Von dem anderen Schnitte (B_1, B_2) wissen wir schon, daß alle Zahlen b_1 in B_1 auch in A_1 enthalten und kleiner als die Zahl $a_1' = b_2'$ sind, welche in B_2 enthalten ist; jede andere in B_2 enthaltene Zahl b_2 muß aber größer als b_2' sein, weil sie sonst auch kleiner als a_1', also in A_1 und folglich auch in B_1 enthalten wäre; mithin ist b_2' die kleinste unter allen in B_2 enthaltenen Zahlen, und folglich wird auch der Schnitt (B_1, B_2) durch dieselbe rationale Zahl $\beta = b_2' = a_1' = \alpha$ hervorgebracht. Die beiden Schnitte sind daher nur unwesentlich verschieden.

Gibt es aber 3. in A_1 wenigstens zwei verschiedene Zahlen $a_1' = b_2'$ und $a_1'' = b_2''$, welche nicht in B_1 enthalten sind, so gibt es deren auch unendlich viele, weil alle die unendlich vielen zwischen

a_1' und a_1'' liegenden Zahlen (§ 1. II) offenbar in A_1, aber nicht in B_1 enthalten sind. In diesem Falle nennen wir die diesen beiden wesentlich verschiedenen Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2) entsprechenden Zahlen α und β ebenfalls verschieden voneinander, und zwar sagen wir, daß α größer als β, daß β kleiner als α ist, was wir in Zeichen sowohl durch $\alpha > \beta$, als durch $\beta < \alpha$ ausdrücken. Hierbei ist hervorzuheben, daß diese Definition vollständig mit der früheren zusammenfällt, wenn beide Zahlen α, β rational sind.

Die nun noch übrigen möglichen Fälle sind diese. Gibt es 4. in B_1 eine und nur eine Zahl $b_1' = a_2'$, welche nicht in A_1 enthalten ist, so sind die beiden Schnitte (A_1, A_2) und (B_1, B_2) nur unwesentlich verschieden und sie werden durch eine und dieselbe rationale Zahl $\alpha = a_2' = b_1' = \beta$ hervorgebracht. Gibt es aber 5. in B_1 mindestens zwei verschiedene Zahlen, welche nicht in A_1 enthalten sind, so ist $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Da hiermit alle Fälle erschöpft sind, so ergibt sich, daß von zwei verschiedenen Zahlen notwendig die eine die größere, die andere die kleinere sein muß, was zwei Möglichkeiten enthält. Ein dritter Fall ist unmöglich. Dies lag zwar schon in der Wahl des Komparativs (größer, kleiner) zur Bezeichnung der Beziehung zwischen α, β; aber diese Wahl ist erst jetzt nachträglich gerechtfertigt. Gerade bei solchen Untersuchungen hat man sich auf das sorgfältigste zu hüten, daß man selbst bei dem besten Willen, ehrlich zu sein, durch eine voreilige Wahl von Ausdrücken, welche anderen schon entwickelten Vorstellungen entlehnt sind, sich nicht verleiten lasse, unerlaubte Übertragungen aus dem einen Gebiete in das andere vorzunehmen.

Betrachtet man nun noch einmal genau den Fall $\alpha > \beta$, so ergibt sich, daß die kleinere Zahl β, wenn sie rational ist, gewiß der Klasse A_1 angehört; da es nämlich in A_1 eine Zahl $a_1' = b_2'$ gibt, welche der Klasse B_2 angehört, so ist die Zahl β, mag sie die größte Zahl in B_1 oder die kleinste Zahl in B_2 sein, gewiß $\leqq a_1'$ und folglich in A_1 enthalten. Ebenso ergibt sich aus $\alpha > \beta$, daß die größere Zahl α, wenn sie rational ist, gewiß der Klasse B_2 angehört, weil $\alpha \geqq a_1'$ ist. Vereinigt man beide Betrachtungen, so erhält man folgendes Resultat: Wird ein Schnitt (A_1, A_2) durch die Zahl α hervorgebracht, so gehört irgendeine rationale Zahl zu der

Klasse A_1 oder zu der Klasse A_2, je nachdem sie kleiner oder größer ist als α; ist die Zahl α selbst rational, so kann sie der einen oder der anderen Klasse angehören.

Hieraus ergibt sich endlich noch folgendes. Ist $\alpha > \beta$, gibt es also unendlich viele Zahlen in A_1, welche nicht in B_1 enthalten sind, so gibt es auch unendlich viele solche Zahlen, welche zugleich von α und von β verschieden sind; jede solche rationale Zahl c ist $< \alpha$, weil sie in A_1 enthalten ist, und sie ist zugleich $> \beta$, weil sie in B_2 enthalten ist.

§ 5.

Stetigkeit des Gebietes der reellen Zahlen.

Zufolge der eben festgesetzten Unterscheidungen bildet nun das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen ein wohlgeordnetes Gebiet von einer Dimension; hiermit soll weiter nichts gesagt sein, als daß folgende Gesetze herrschen.

I. Ist $\alpha > \beta$, und $\beta > \gamma$, so ist auch $\alpha > \gamma$. Wir wollen sagen, daß die Zahl β zwischen den Zahlen α, γ liegt.

II. Sind α, γ zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen β, welche zwischen α, γ liegen.

III. Ist α eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems $\mathfrak{R}$ in zwei Klassen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse $\mathfrak{A}_1$ umfaßt alle die Zahlen α_1, welche $< \alpha$ sind, die zweite Klasse $\mathfrak{A}_2$ umfaßt alle die Zahlen α_2, welche $> \alpha$ sind; die Zahl α selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die größte Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Klasse. In jedem Falle ist die Zerlegung des Systems $\mathfrak{R}$ in die beiden Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art, daß jede Zahl der ersten Klasse $\mathfrak{A}_1$ kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse $\mathfrak{A}_2$ ist, und wir sagen, daß diese Zerlegung durch die Zahl α hervorgebracht wird.

Der Kürze halber, und um den Leser nicht zu ermüden, unterdrücke ich die Beweise dieser Sätze, welche unmittelbar aus den Definitionen des vorhergehenden Paragraphen folgen.

Außer diesen Eigenschaften besitzt aber das Gebiet $\mathfrak{R}$ auch Stetigkeit, d. h. es gilt folgender Satz:

IV. Zerfällt das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art, daß jede Zahl α_1 der Klasse $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.

Beweis. Durch die Zerlegung oder den Schnitt von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ ist zugleich ein Schnitt (A_1, A_2) des Systems R aller rationalen Zahlen gegeben, welcher dadurch definiert wird, daß A_1 alle rationalen Zahlen der Klasse $\mathfrak{A}_1$ und A_2 alle übrigen rationalen Zahlen, d. h. alle rationalen Zahlen der Klasse $\mathfrak{A}_2$ enthält. Es sei α die völlig bestimmte Zahl, welche diesen Schnitt (A_1, A_2) hervorbringt. Ist nun β irgendeine von α verschiedene Zahl, so gibt es immer unendlich viele rationale Zahlen c, welche zwischen α und β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Klasse A_1 und folglich auch der Klasse $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Klasse $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Klasse A_2 und folglich auch der Klasse $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Klasse $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Klasse $\mathfrak{A}_1$ oder der Klasse $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird, was zu beweisen war.

§ 6.

Rechnungen mit reellen Zahlen.

Um irgendeine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf an, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definieren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

Ist c irgendeine rationale Zahl, so nehme man sie in die Klasse C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art gibt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geqq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Klasse C_2 auf. Diese Einteilung aller rationalen Zahlen in die beiden Klassen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede in C_1 enthaltene Zahl $c_1 \leqq \alpha + \beta$, weil $a_1 \leqq \alpha$, $b_1 \leqq \beta$, also auch $a_1 + b_1 \leqq \alpha + \beta$ ist; wäre ferner eine in C_2 enthaltene Zahl $c_2 < \alpha + \beta$, also $\alpha + \beta = c_2 + p$, wo p eine positive rationale Zahl bedeutet, so wäre

$$c_2 = (\alpha - {}^1/_2\, p) + (\beta - {}^1/_2\, p),$$

was im Widerspruch mit der Definition der Zahl c_2 steht, weil $\alpha - {}^1/_2\, p$ eine Zahl in A_1, und $\beta - {}^1/_2\, p$ eine Zahl in B_1 ist; folglich ist jede in C_2 enthaltene Zahl $c_2 \geqq \alpha + \beta$. Mithin wird in diesem Falle der Schnitt (C_1, C_2) durch die Summe $\alpha + \beta$ hervorgebracht. Man verstößt daher nicht gegen die in der Arithmetik der rationalen Zahlen geltende Definition, wenn man in allen Fällen unter der Summe $\alpha + \beta$ von zwei beliebigen reellen Zahlen α, β diejenige Zahl γ versteht, durch welche der Schnitt (C_1, C_2) hervorgebracht wird. Ist ferner nur eine der beiden Zahlen α, β, z. B. α, rational, so überzeugt man sich leicht, daß es keinen Einfluß auf die Summe $\gamma = \alpha + \beta$ hat, ob man die Zahl α in die Klasse A_1 oder in die Klasse A_2 aufnimmt.

Ebenso wie die Addition lassen sich auch die übrigen Operationen der sogenannten Elementar-Arithmetik definieren, nämlich die Bildung der Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, und man gelangt auf diese Weise zu wirklichen Beweisen von Sätzen (wie z. B. $\sqrt{2}\,.\sqrt{3} = \sqrt{6}$), welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind. Die Weitläufigkeiten, welche bei den Definitionen der komplizierteren Operationen zu befürchten sind, liegen teils in der Natur der Sache, zum größten Teil aber lassen sie sich vermeiden. Sehr nützlich ist in dieser Beziehung der Begriff eines Intervalls, d. h. eines Systems A von rationalen Zahlen, welches folgende charakteristische Eigenschaft besitzt: sind a und a' Zahlen des Systems A, so sind auch alle zwischen a und a' liegenden rationalen Zahlen in A enthalten. Das System R aller rationalen Zahlen, ebenso die beiden Klassen eines jeden Schnittes sind Intervalle. Gibt es aber eine rationale Zahl a_1, welche kleiner, und eine rationale Zahl a_2, welche größer ist, als jede Zahl des Intervalls A, so heiße A ein endliches Intervall; es gibt dann offenbar unendlich viele Zahlen von derselben Beschaffenheit wie a_1, und unendlich viele Zahlen von derselben Beschaffenheit wie a_2; das ganze Gebiet R zerfällt in drei Stücke, A_1, A, A_2, und es treten zwei vollständig bestimmte rationale oder irrationale Zahlen α_1, α_2 auf, welche bzw. die untere und obere (oder die kleinere und größere) Grenze des Intervalls A genannt werden können; die untere Grenze α_1 ist durch den Schnitt bestimmt, bei welchem die erste Klasse durch das System A_1 gebildet wird, und die obere Grenze α_2 durch den Schnitt, bei welchem A_2 die zweite Klasse bildet. Von jeder rationalen oder irrationalen Zahl α, welche zwischen α_1 und α_2 liegt, mag gesagt werden, sie liege innerhalb des Intervalls A. Sind alle Zahlen eines Intervalls A auch Zahlen eines Intervalls B, so heiße A ein Stück von B.

Noch viel größere Weitläufigkeiten scheinen in Aussicht zu stehen, wenn man dazu übergehen will, die unzähligen Sätze der Arithmetik der rationalen Zahlen (wie z. B. den Satz $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$) auf beliebige reelle Zahlen zu übertragen. Dem ist jedoch nicht so; man überzeugt sich bald, daß hier alles darauf ankommt, nachzuweisen, daß die arithmetischen Operationen selbst eine gewisse Stetigkeit besitzen. Was ich hiermit meine, will ich in die Form eines allgemeinen Satzes einkleiden:

„Ist die Zahl λ das Resultat einer mit den Zahlen α, β, γ … angestellten Rechnung, und liegt λ innerhalb des Intervalls L, so lassen sich Intervalle A, B, C … angeben, innerhalb deren die Zahlen α, β, γ … liegen, und von der Art, daß das Resultat derselben Rechnung, in welcher die Zahlen α, β, γ … durch beliebige Zahlen der Intervalle A, B, C … ersetzt werden, jedesmal eine innerhalb des Intervalls L liegende Zahl wird.“ Die abschreckende Schwerfälligkeit aber, welche dem Ausspruche eines solchen Satzes anklebt, überzeugt uns, daß hier etwas geschehen muß, um der Sprache zu Hilfe zu kommen; dies wird in der Tat auf die vollkommenste Weise erreicht, wenn man die Begriffe der veränderlichen Größen, der Funktionen, der Grenzwerte einführt, und zwar wird es das Zweckmäßigste sein, schon die Definitionen der einfachsten arithmetischen Operationen auf diese Begriffe zu gründen, was hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden kann.

§ 7.

Infinitesimal-Analysis.

Es soll hier nur noch zum Schluß der Zusammenhang beleuchtet werden, welcher zwischen unseren bisherigen Betrachtungen und gewissen Hauptsätzen der Infinitesimalanalysis besteht.

Man sagt, daß eine veränderliche Größe x, welche sukzessive bestimmte Zahlwerte durchläuft, sich einem festen Grenzwert α nähert, wenn x im Laufe des Prozesses definitiv zwischen je zwei Zahlen zu liegen kommt, zwischen denen α selbst liegt, oder was dasselbe ist, wenn die Differenz $x - \alpha$ absolut genommen unter jeden gegebenen, von Null verschiedenen Wert definitiv herabsinkt.

Einer der wichtigsten Sätze lautet folgendermaßen: „Wächst eine Größe x beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert."

Ich beweise ihn auf folgende Art. Der Voraussetzung nach gibt es eine und folglich auch unendlich viele Zahlen α_2 von der Art, daß stets $x < \alpha_2$ bleibt; ich bezeichne mit $\mathfrak{A}_2$ das System aller dieser Zahlen α_2, mit $\mathfrak{A}_1$ das System aller anderen Zahlen α_1; jede der letzteren hat die Eigenschaft, daß im Laufe des Prozesses definitiv $x \geqq \alpha_1$ wird, mithin ist jede Zahl α_1 kleiner als jede Zahl α_2, und folglich existiert eine Zahl α, welche entweder die größte in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste in $\mathfrak{A}_2$ ist (§ 5, IV). Das erstere kann nicht der Fall sein, weil x nie aufhört, zu wachsen, also ist α die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$. Welche Zahl α_1 man nun auch nehmen mag, so wird schließlich definitiv $\alpha_1 < x < \alpha$ sein, d. h. x nähert sich dem Grenzwerte α.

Dieser Satz ist äquivalent mit dem Prinzip der Stetigkeit, d. h. er verliert seine Gültigkeit, sobald man auch nur eine reelle Zahl in dem Gebiete $\mathfrak{R}$ als nicht vorhanden ansieht; oder anders ausgedrückt: ist dieser Satz richtig, so ist auch der Satz IV in § 5 richtig.

Ein anderer, mit diesem ebenfalls äquivalenter Satz der Infinitesimalanalysis, welcher noch öfter zur Anwendung kommt, lautet folgendermaßen: „Läßt sich in dem Änderungsprozesse einer Größe x für jede gegebene positive Größe δ auch eine entsprechende Stelle angeben, von welcher ab x sich um weniger als δ ändert, so nähert sich x einem Grenzwert."

Diese Umkehrung des leicht zu beweisenden Satzes, daß jede veränderliche Größe, welche sich einem Grenzwert nähert, sich zuletzt um weniger ändert, als irgendeine gegebene positive Größe, kann ebensowohl aus dem vorhergehenden Satze wie direkt aus dem Prinzip der Stetigkeit abgeleitet werden. Ich schlage den letzteren Weg ein. Es sei δ eine beliebige positive Größe (d. h. $\delta > 0$), so wird der Annahme zufolge ein Augenblick eintreten, von welchem ab x sich um weniger als δ ändern wird, d. h. wenn x in diesem Augenblick den Wert a besitzt, so wird in der Folge stets $x > a - \delta$ und $x < a + \delta$ sein. Ich lasse nun einstweilen die ursprüngliche Annahme fallen, und halte nur die soeben bewiesene Tatsache fest, daß alle späteren Werte der Veränderlichen x zwischen zwei angebbaren, endlichen Werten liegen. Hierauf gründe ich eine doppelte Einteilung aller reellen Zahlen. In das System $\mathfrak{A}_2$ nehme ich eine Zahl α_2 (z. B. $a + \delta$) auf, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \leqq \alpha_2$ wird; in das System $\mathfrak{A}_1$ nehme ich jede nicht in $\mathfrak{A}_2$ enthaltene Zahl auf; ist α_1 eine solche Zahl, so wird, wie weit auch der Prozeß vorgeschritten sein mag, es noch unendlich oft eintreten, daß $x > \alpha_1$ ist. Da jede Zahl α_1 kleiner ist als jede Zahl α_2, so gibt es eine völlig bestimmte Zahl α, welche diesen Schnitt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ des Systems $\mathfrak{R}$ hervorbringt, und welche ich den oberen Grenzwert der stets endlich bleibenden Veränderlichen x nennen will. Ebenso wird durch das Verhalten der Veränderlichen x ein zweiter Schnitt $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ des Systems $\mathfrak{R}$ hervorgebracht: eine Zahl β_1 (z. B. $a - \delta$) wird in $\mathfrak{B}_1$ aufgenommen, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \geqq \beta_1$ wird; jede andere, in $\mathfrak{B}_2$ aufzunehmende Zahl β_2 hat die Eigenschaft, daß niemals definitiv $x \geqq \beta_2$, also immer noch unendlich oft $x < \beta_2$ wird; die Zahl β, durch welche dieser Schnitt hervorgebracht wird, heiße der untere Grenzwert der Veränderlichen x. Die beiden Zahlen α, β sind offenbar auch durch die folgende Eigenschaft charakterisiert: ist ε eine beliebig kleine positive Größe, so wird stets definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$, aber niemals wird definitiv $x < \alpha - \varepsilon$, und niemals definitiv $x > \beta + \varepsilon$. Nun sind zwei Fälle möglich. Sind α und β verschieden voneinander, so ist notwendig $\alpha > \beta$, weil stets $\alpha_2 \geqq \beta_1$ ist; die Veränderliche x oszilliert und erleidet, wie weit der Prozeß auch vorgeschritten sein mag, immer noch Änderungen, deren Betrag den Wert $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$ übertrifft, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet. Die ursprüngliche

Annahme, zu der ich erst jetzt zurückkehre, steht aber im Widerspruch mit dieser Konsequenz; es bleibt daher nur der zweite Fall $\alpha = \beta$ übrig, und da schon bewiesen ist, daß, wie klein auch die positive Größe ε sein mag, immer definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$ wird, so nähert sich x dem Grenzwert α, was zu beweisen war.

Diese Beispiele mögen genügen, um den Zusammenhang zwischen dem Prinzip der Stetigkeit und der Infinitesimalanalysis darzulegen.

[Die an diese klassische Schrift anknüpfende Entwicklung ist so bekannt, daß wir glauben auf Erläuterungen verzichten zu dürfen. Im übrigen verweisen wir — als Dedekinds eigene Erläuterungen darstellend — auf die Briefe an Lipschitz vom 10. Juni und 27. Juli 1876 (LXV), insbesondere auf die darin enthaltene axiomatische Auffassung.]

LI.

Was sind und was sollen die Zahlen?

[Erste Auflage 1888. Sechste Auflage 1930.]

Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.

Meiner Schwester
Julie
und meinem Bruder
Adolf,
Dr. jur., Oberlandesgerichtsrat zu Braunschweig
in herzlicher Liebe gewidmet.

Vorwort zur ersten Auflage.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen*) noch keineswegs als erfüllt anzusehen. Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte. Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr

*) Von den mir bekannt gewordenen Schriften erwähne ich das verdienstvolle Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von E. Schröder (Leipzig 1873), in welchem man auch ein Literaturverzeichnis findet, und außerdem die Abhandlungen von Kronecker und von Helmholtz über den Zahlbegriff und über Zählen und Messen (in der Sammlung der an E. Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze, Leipzig 1887). Das Erscheinen dieser Abhandlungen ist die Veranlassung, welche mich bewogen hat, nun auch mit meiner, in mancher Beziehung ähnlichen, aber durch ihre Begründung doch wesentlich verschiedenen Auffassung hervorzutreten, die ich mir seit vielen Jahren und ohne jede Beeinflussung von irgendwelcher Seite gebildet habe.

2-1

Opgaver om de klassiske problemer

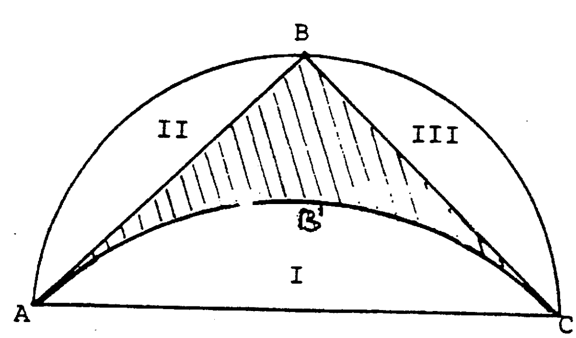
Cirklens kvadratur

Da grækerne ikke satte tal på geometriske størrelser blev hovedproblemet i areallæren ikke at finde en figurs areal i tal, men at konstruere et kvadrat, der har lige så stort areal som en given figur. Man taler om figurens kvadratur. Specielt kendt er problemet om cirklens kvadratur. I Euklids Elementer bog II sætning 14 løses problemet "at konstruere et kvadrat lig en given polygon". Og Euklid konstruerer vel at mærke kun med passer og lineal.

I et forsøg på at kvadrere cirklen kvadrerede Hippocrates fra Chios (ca. 430 f.Kr.) tre typer "måner", d.v.s. figurer begrænset af to cirkelbuer. Det simpelste resultat han opnåede var, at hvis ABC (figur 11) er en halvcirkelbue og AB'C er en kvartcirkelbue, så er månen ABCB'A lig med trekanten ABC.

Opgave 11: Vis dette.

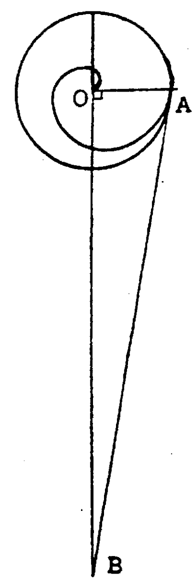
Vink: Det vides, at Hippocrates kendte Pythagoras' læresætning, og det siges, at han viste at ligedannede cirkeludsnit forholder sig som kvadraterne på deres baser.



Figur 11

Opgave 12: På Archimedes' tid var man nok overbevist om umuligheden af at kvadrere cirklen med konstruktioner, hvori der bruges cirkler og rette linier alene, men Archimedes viser dog, at det kan lade sig gøre ved brug af den efter ham opkaldte spiral. I indledningen til værket *Om spiraler* skriver han (jvf. figur 17):

> "Hvis en ret linie, hvis ene endepunkt [0] ligger fast, drejer med jævn (vinkel) hastighed i en plan indtil den vender tilbage til sin udgangsposition, og hvis, på samme tid som den rette linie drejer, et punkt bevæger sig jævnt langs den rette linie, startende fra det faste endepunkt, vil punktet beskrive en spiral i planen... .



Figur 17

> Og, hvis en ret linie tangerer spiralen i dens endepunkt og en anden ret linie tegnes vinkelret på den linie, der har drejet sig og indtaget sit udgangspunkt [OA] fra det faste endepunkt og forlænges til skæringen med tangenten [i B], da siger jeg, at denne rette linie [OB] er lig med omkredsen i cirklen" [med O som centrum og radius lig med OA]

Brug en parameterfremstilling af Arhimedes' spiral til et moderne bevis for ovenstående påstand

Terningens fordobling

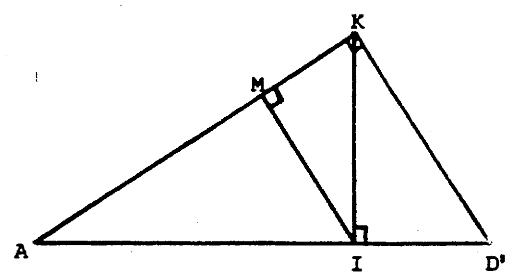
Det såkaldt deliske problem går ud på at konstruere siden i en terning, der er dobbelt så stor (i volumen) som en given terning. I en kommentar til Arkimedes skrift "Kuglen og Cylinderen" skriver Eutokios (5. årh. e.Kr.) at Hippocrates førte dette problem tilbage til det mere generelle problem om at bestemme to sammenhørende mellemproportionale x og y mellem to givne liniestykker a og b, d.v.s. at bestemme x og y så

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

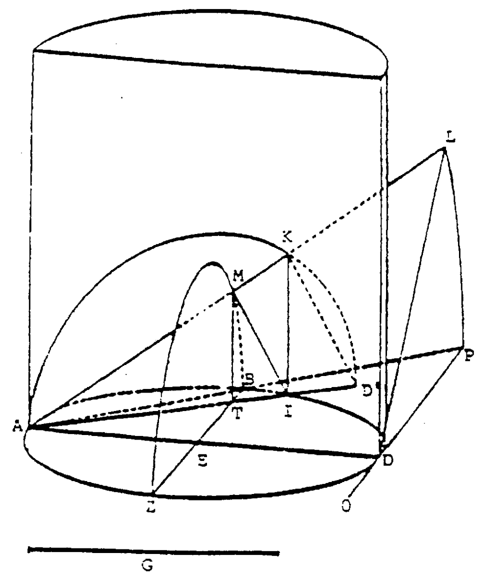
Opgave 13: Vis, hvordan terningens fordobling kan føres tilbage til bestemmelse af to sammenhørende mellemproportionaler.

Opgave 14: Konstruer (med passer og lineal) en mellemproportional x mellem to givne liniestykker a og b, dvs således at $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Opgave 15: Eutokios gengav en række tidligere konstruktioner af to sammenhørende mellemproportionaler. Den tidligste og mest imponerende konstruktion skyldes Arkytas fra Taras (ca. 380 f.Kr.). Gennemgå nedenstående oversættelse af Eutokios' tekst (mine kommentarer i parantes), og overvej hvordan Arkytas kan være kommet på konstruktionen. Vink: betragt evt. flg. figur.



"Lad to liniestykker, AD og G være givet. Så skal vi bestemme to sammenhørende mellemproportionaler mellem AD og G. Lad en cirkel ABDZ være beskrevet med den største af linierne AD som diameter og lad (en korde) AB være tegnet, lig med G og lad forlængelsen af denne korde skære cirkeltangenten gennem D i P. Lad linien BEZ være tegnet parallel med PDO; tænk dig en ret halvcylinder konstrueret på halvcirklen ABD, og en lodret halvcirkel med AD som diameter liggende i halvcylinderens kvadrant. Når halvcirklen (holdt i lodret position) nu drejes fra D mod B, medens diameterens endepunkt A holdes fast, så vil den skære cylinderoverfladen og skæringspunktet vil aftegne en kurve derpå (skæringskurven mellem halvcylinderen og ovennævnte halvtorus). Hvis derimod AD holdes fast og trekanten APD drejes (om AD) i modsat retning af halvcirklen, så vil den rette linie AP beskrive overfladen af en kegle, og denne vil under sin drejning skære kurven på cylinderen i et bestemt punkt (skæringspunkt mellem halvcylinder, halvtorus og kegle). Imedens vil punktet B beskrive en halvcirkel på kegleoverfladen. Lad den bevægede halvcirkel være i stillingen D'KA når disse kurver mødes og lad trekanten, er drejer i modsat retning, indtage stilligen DLA, medens skæringspunktet er K. Og lad halvcirklen beskrevet af B være BMZ, og lad den skære cirklen BDZA langs linien BZ. Nedfæld den vinkelrette fra K på halvcirklen DBA's plan. Dens fodpunkt vil ligge på omkredsen af cirklen, da cylinderen er en ret cylinder. Kald den vinkelrette KI, og lad linien fra I til A skære BZ i T, og lad linien AL skære halvcirklen BMZ i M. Lad også linierne KD', MI og MT være tegnede.



Figur 24 (efter van der Waerden)

Da hver af de to halvcirkler D'KA og BMZ er vinkelrette på basisplanen, er deres fælles skæringslinie også vinkelret på cirklens plan, så MT er også vinkel ret på BZ. Derfor er rektanglet på TB og TZ, og altså rektanglet på TA og TI, lig med kvadratet på MT. Derfor er trekant AMI ligedannet med MIT og med MAT og altså er <AMI en ret vinkel. Men <D'KA er også en ret vinkel. Derfor er linierne KD' og MI parallelle, og vi har proportionaliteten:

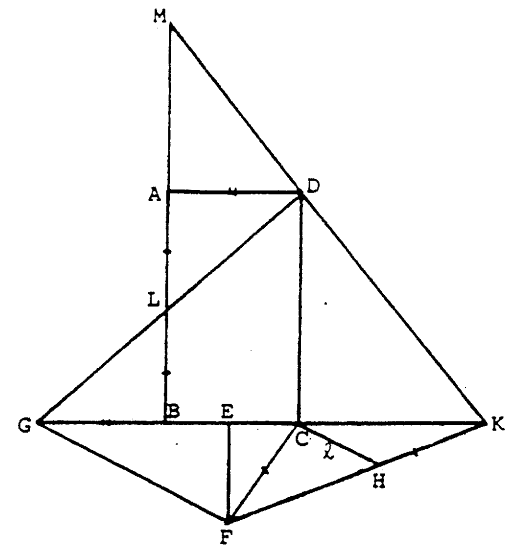
$$\frac{D'A}{AK} = \frac{KA}{AI} = \frac{IA}{AM}.$$

Altaå danner de fire linie(stykker) D'A, AK, AI og AM en geometrisk række. Og AM er lig med G, da den er lig med AB. Derfor har vi fundet to sammenhørende mellemproportionaler AK og AI mellem de to givne liniestykker AD og G."

Opgave 16: Eutokios beretter, at Menaichmos (ca. 350 f.Kr.) løste problemet om de to sammenhørende mellemproportionaler ved skæring af keglesnit, mere præcist ved skæring af to parabler eller en parabel og et keglesnit. Vis, hvordan det gøres.

Opgave 17: Kort før Apollonios gav Nikomedes (ca. 220 f.Kr.) følgende konstruktion (figur 31):

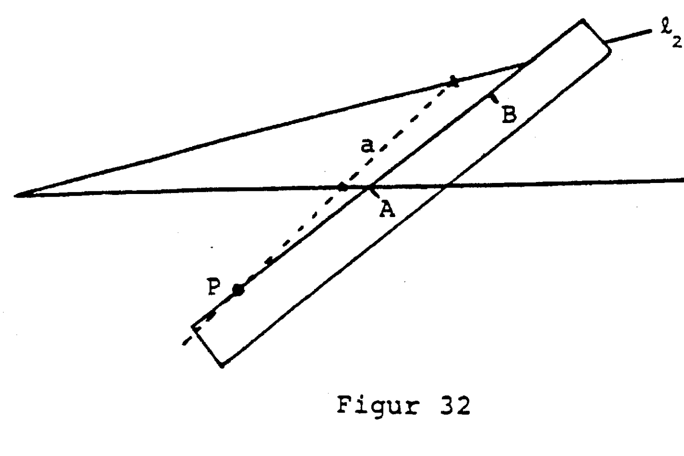
Anbring atter de to givne liniestykker CD og DA vinkelret på hinanden og tegn rektanglet ABCD. Midtpunkterne af AB og BC kaldes henholdsvis L og E. LD skærer CB's forlængelse i G. Oprejs den vinkelrette på BC i E og afsæt F herpå, så FC = AL. Tegn GF og en linie CH parallel dermed. Tegn linien FHK så HK = AL. Den rette linie DK skærer AB's forlængelse i M. CK og AM er da de søgte mellemproportionaler (bevis dette).



Figur 31.

Det eneste skridt, der ikke kan udføres med passer og lineal, er konstruktionen af FHK så HK = AL. Konstruktionen kaldes en indskydningskonstruktion, idet det gælder om at indskyde et liniestykke af en given længde mellem to givne rette linier, når liniestykkets forlængelse skal gå gennem et givet punkt. En indskydningskonstruktion kan udføres med en lineal, hvorpå der er anbragt to punkter A og B med en afstand lig med stykket, der skal indskydes.

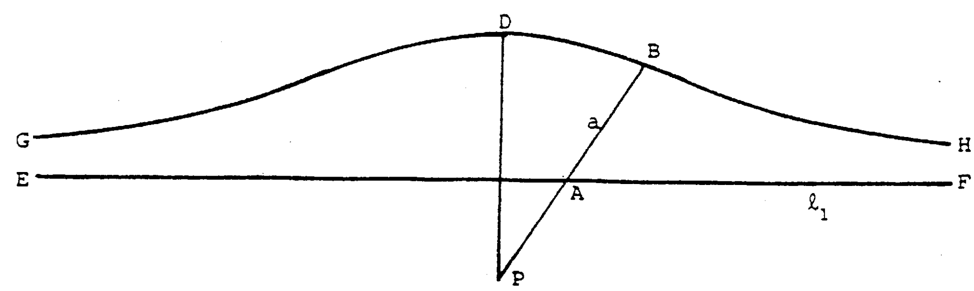
Thi hvis ℓ_1 og ℓ_2 er de to linier som stykket AB skal indskydes mellem (figur 32), og P er punktet som AB's forlængelse skal gå igennem, skal man blot lægge linealen så den



Figur 32

rører P og så punktet A ligger på ℓ_1 og så bevæge den om P så A vedbliver at være på ℓ_1, indtil B kommer til at ligge på ℓ_2.

Under denne drejning af linealen beskriver B en kurve (figur 33) GDH, der kaldes konkoiden. Den karakteriseres ved



Figur 33.

at enhver linie gennem P (ikke parallel med ℓ_1) skærer linien ℓ_1 og konkoiden GH i to punkter A og B, således at AB er lig med en konstant a. ℓ_1 kaldes konkoidens basis, P dens pol og a dens parameter.

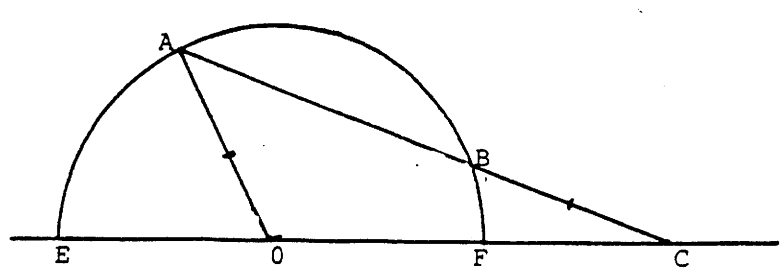
Konkoiden blev indført af Nikomedes. Bestem konkoidens ligning.

Vinklens tredeling

Problemet er at konstruere en vinkel der er en trediedel af en given vinkel.

Opgave 18: I Lemmaernes bog formulerede Archimedes (ca. 287 – 212 f.Kr.) en sætning der svarer til følgende vinkeltredeling:

Lad EOA være den givne vinkel. Beskriv en cirkel med toppunkt i O og vilkårlig radius. Den skærer vinklens ben i E og A. Indskyd en linie ABC, så det stykke BC der afskæres



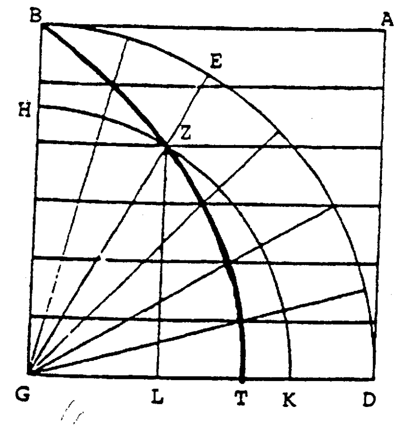
Figur 39.

mellem cirklen og EO's forlængelse er lig med cirklens radius. Da er $< OCB = \frac{1}{3} < EOA$. Bevis dette. (Vink: Træk linien OB).

Opgave 19: Vis, at man kan dele et givet liniestykke i n lige store dele med passer og lineal.

Opgave 20: Omkring 420 f.Kr. indførte Hippias fra Elis kvadratricen. Denne kurve beskrives således af Pappos:

"Tegn en cirkelbue BED om G i et kvadrat ABGD. Lad den rette linie GB rotere uniformt om G så at B beskriver buen BED og lad linien BA bevæge sig uniformt mod GD, idet den forbliver parallel med GD. Lad begge uniforme bevægelser finde sted i samme tidsrum så at GB og BA vil falde sammen med GD til samme tidspunkt. Disse to bevægende linier skærer hinanden i et punkt som bevæger sig sammen med dem og som beskriver en kurve BZT (kvadratricen). Hvis GZE er en bestemt stilling af den roterende linie og Z er skæringspunktet med linien der parallelforskydes, så vil, ifølge definitionen, BG forholde sig til den vinkelrette ZL som hele buen BD til buen ED."



Figur 36

Overvej, at man ved hjælp af denne kurve let kan føre problemet om n–deling (specielt 3–deling) af vinklen tilbage til problemet om n–deling af et liniestykke.

Opgave 21: Det er sandsynligt, at Hippias indførte kvadratricen med vinklens tredeling for øje, men det vides ikke med sikkerhed. Derimod ved vi, at Menaichmos' bror Dinostratos (ca. 350 f.Kr.) brugte kurven til at kvadrere cirklen, hvoraf den fik sit navn. Faktisk rektificerede han cirklen, så han må have kendt den sammenhæng mellem cirklens areal og omkreds, som Archmedes senere beviste. Helt præcist viste Dinostratos at (figur 36)

$$\frac{\frown DEB}{BG} = \frac{BG}{GT}.$$

Overvej hvordan T fremkommer og bevis Dinostratos' resultat.

35

Measurement of a Circle: Propositions 1–3*

(Approximation of π Using in Essence Upper and Lower Limits)

– ARCHIMEDES

PROPOSITION 1

The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.

Let $ABCD$ be the given circle, K the triangle described.

Then, if the circle is not equal to K, it must be either greater or less.

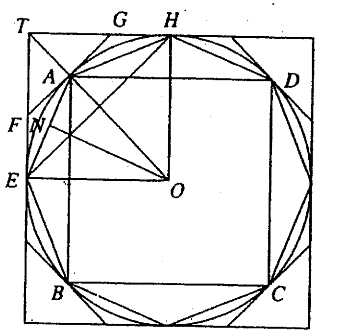
I. If possible, let the circle be greater than K.

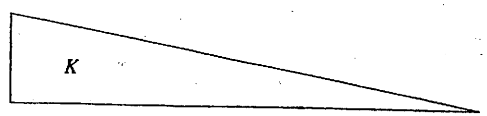
Inscribe a square $ABCD$, bisect the arcs AB, BC, CD, DA, then bisect (if necessary) the halves, and so on, until the sides of the inscribed polygon whose angular points are the points of division subtend segments whose sum is less than the excess of the area of the circle over K.

Thus the area of the polygon is greater than K.

Let AE be any side of it, and ON the perpendicular on AE from the centre O.

Then ON is less than the radius of the circle





and therefore less than one of the sides about the right angle in K. Also the perimeter of the polygon is less than the circumference of the circle, i.e. less than the other side about the right angle in K.

Therefore the area of the polygon is less than K; which is inconsistent with the hypothesis.

Thus the area of the circle is not greater than K.

II. If possible, let the circle be less than K.

Circumscribe a square, and let two adjacent sides, touching the circle in E, H, meet in T. Bisect the arcs between adjacent points of contact and draw the tangents at the points of bisection. Let A be the middle point of the arc EH, and FAG the tangent at A.

Then the angle TAG is a right angle.

Therefore $\quad TG > GA$

$\qquad\qquad\qquad > GH.$

It follows that the triangle FTG is greater than half the area $TEAH$.

Similarly, if the arc AH be bisected and the tangent at the point of bisection be drawn, it will cut off from the area GAH more than one-half.

Thus, by continuing the process, we shall ultimately arrive at a circumscribed polygon such that the spaces intercepted between it and the circle are together less than the excess of K over the area of the circle.

Thus the area of the polygon will be less than K.

Now, since the perpendicular from O on any side of the polygon is equal to the radius of the circle, while the perimeter of the polygon is greater than the circumference of the circle, it follows that the area of the polygon is greater than the triangle K; which is impossible.

Therefore the area of the circle is not less than K.

Since then the area of the circle is neither greater nor less than K, it is equal to it.

PROPOSITION 2

The area of a circle is to the square on its diameter as 11 *to* 14.

[The text of this proposition is not satisfactory, and Archimedes cannot have placed it before Proposition 3, as the approximation depends upon the result of that proposition.]

PROPOSITION 3

The ratio of the circumference of any circle to its diameter is less than $3\frac{1}{7}$ *but greater than* $3\frac{10}{71}$.

[In view of the interesting questions arising out of the arithmetical content of this proposition of Archimedes, it is necessary, in reproducing it, to distinguish carefully the actual steps set out in the text as we have it from the intermediate steps (mostly supplied by Eutocius) which it is convenient to put in for the purpose of making the proof easier to follow. Accordingly all the steps not actually appearing in the text have been enclosed in square brackets, in order that it may be clearly seen how far Archimedes omits actual calculations and only gives results. It will be observed that he gives two fractional approximations to $\sqrt{3}$ (one being less and the other greater than the real value) without any explanation as to how he arrived at them; and in like manner approximations to the square roots of several large numbers which are not complete squares are merely stated . . .—T. L. Heath note.]

I. Let AB be the diameter of any circle, O its centre, AC the tangent at A; and let the angle AOC be one-third of a right angle.

Then

$$OA:AC\ [= \sqrt{3}:1] > 265:153 \qquad (1)$$

and

$$OC:CA\ [= 2:1] = 306:153 \qquad (2)$$

First, draw OD bisecting the angle AOC and meeting AC in D.

Now

$$CO:OA = CD:DA, \qquad \text{[Eucl. VI. 3]}$$

so that

$$[CO + OA:OA = CA:DA, \text{ or}]$$
$$CO + OA:CA = OA:AD.$$

Therefore [by (1) and (2)]

$$OA:AD > 571:153 \qquad (3)$$

Hence

$$OD^2:AD^2\ [= (OA^2 + AD^2):AD^2$$
$$> (571^2 + 153^2):153^2]$$
$$> 349450:23409,$$

so that

$$OD:DA > 591\tfrac{1}{8}:153 \qquad (4)$$

Secondly, let OE bisect the angle AOD, meeting AD in E.

2-8

* SOURCE: Reprinted with permission from Thomas L. Heath (ed.), *The Works of Archimedes* (Dover Edition, 1953), 93–98.

[Then

$$DO:OA = DE:EA,$$

so that

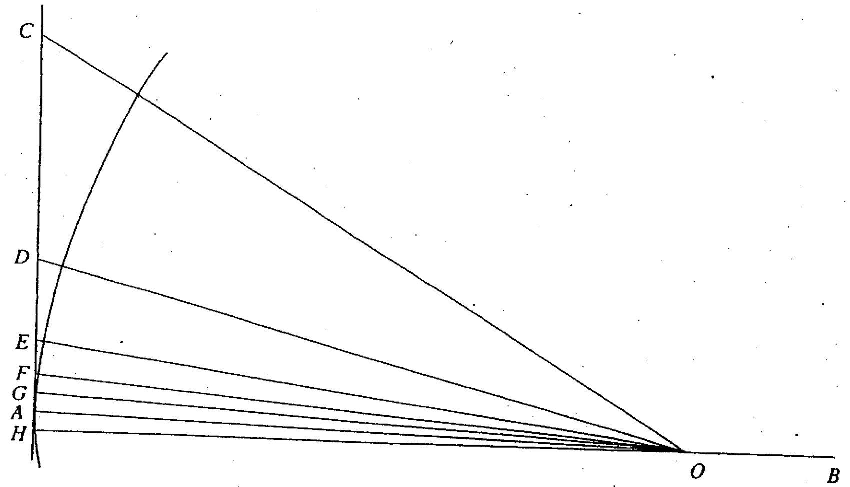
$$DO + OA:DA = OA:AE.]$$

Therefore

$$OA:AE\ [> (591\tfrac{1}{8} + 571):153, \text{ by (3) and (4)}]$$
$$> 1162\tfrac{1}{8}:153 \qquad (5)$$

[It follows that

$$OE^2:EA^2 > \{(1162\tfrac{1}{8})^2 + 153^2\}:153^2$$
$$> (1350534\tfrac{33}{64} + 23409):23409$$
$$> 1373943\tfrac{33}{64}:23409.]$$



Thus

$$OE:EA > 1172\tfrac{1}{8}:153 \qquad (6)$$

Thirdly, let OF bisect the angle AOE and meet AE in F.

We thus obtain the result [corresponding to (3) and (5) above] that

$$OA:AF\ [> (1162\tfrac{1}{8} + 1172\tfrac{1}{8}):153]$$
$$> 2334\tfrac{1}{4}:153 \qquad (7)$$

[Therefore

$$OF^2:FA^2 > \{(2334\tfrac{1}{4})^2 + 153^2\}:153^2$$
$$> 5472132\tfrac{1}{16}:23409.]$$

Thus

$$OF:FA > 2339\tfrac{1}{4}:153 \qquad (8)$$

Fourthly, let OG bisect the angle AOF, meeting AF in G.

We have then

$$OA:AG\ [> (2334\tfrac{1}{4} + 2339\tfrac{1}{4}):153, \text{ by means of (7) and (8)}]$$
$$> 4673\tfrac{1}{2}:153.$$

Now the angle AOC, which is one-third of a right angle, has been bisected four times, and it follows that

$$\angle AOG = \tfrac{1}{48} \text{ (a right angle).}$$

Make the angle AOH on the other side of OA equal to the angle AOG, and let GA produced meet OH in H.

Then

$$\angle GOH = \tfrac{1}{24} \text{ (a right angle).}$$

Thus GH is one side of a regular polygon of 96 sides circumscribed to the given circle.

And, since

$$OA:AG > 4673\tfrac{1}{2}:153,$$

while

$$AB = 2OA, \qquad GH = 2AG,$$

it follows that

AB:(perimeter of polygon of 96 sides)

$$[> 4673\tfrac{1}{2}:153 \times 96]$$
$$> 4673\tfrac{1}{2}:14688.$$

But

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$
$$\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right]$$
$$< 3\tfrac{1}{7}.$$

Therefore the circumference of the circle (being less than the perimeter of the polygon) is *a fortiori* less than $3\frac{1}{7}$ times the diameter AB.

II. Next let AB be the diameter of a circle, and let AC, meeting the circle in C, make the angle CAB equal to one-third of a right angle. Join BC.

Then

$$AC:CB\ [= \sqrt{3}:1] < 1351:780.$$

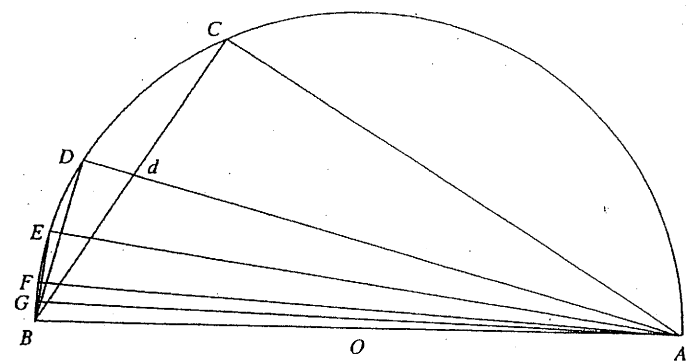
First, let AD bisect the angle BAC and meet BC in d and the circle in D. Join BD.

Then

$$\angle BAD = \angle dAC$$
$$= \angle dBD,$$

and the angles at D, C are both right angles.

It follows that the triangles ADB, [ACd], BDd are similar.



Therefore

$$AD:DB = BD:Dd$$
$$[= AC:Cd]$$
$$= AB:Bd$$
$$= AB + AC:Bd + Cd$$
$$= AB + AC:BC \quad \text{[Eucl. VI. 3]}$$

or

$$BA + AC:BC = AD:DB.$$

[But

$$AC:CB < 1351:780, \text{ from above,}$$

while

$$BA:BC = 2:1$$
$$= 1560:780.]$$

Therefore

$$AD:DB < 2911:780 \qquad (1)$$

[Hence

$$AB^2:BD^2 < (2911^2 + 780^2):780^2$$
$$< 9082321:608400.]$$

Thus

$$AB:BD < 3013\tfrac{3}{4}:780 \qquad (2)$$

Secondly, let AE bisect the angle BAD, meeting the circle in E; and let BE be joined.

Then we prove, in the same way as before, that

$$AE:EB\ [= BA + AD:BD$$
$$< (3013\tfrac{3}{4} + 2911):780, \text{ by (1) and (2)}]$$
$$< 5924\tfrac{3}{4}:780$$
$$< 5924\tfrac{3}{4} \times \tfrac{4}{13}:780 \times \tfrac{4}{13}$$
$$< 1823:240 \qquad (3)$$

[Hence

$$AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$$
$$< 3380929 : 57600.]$$

Therefore

$$AB : BE < 1838\tfrac{9}{11} : 240 \qquad (4)$$

Thirdly, let AF bisect the angle BAE, meeting the circle in F.

Thus

$$AF : FB\ [= BA + AE : BE$$
$$< 3661\tfrac{9}{11} : 240, \text{ by (3) and (4)]}$$
$$< 3661\tfrac{9}{11} \times \tfrac{11}{40} : 240 \times \tfrac{11}{40}$$
$$< 1007 : 66 \qquad (5)$$

It follows that

$$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$$
$$< 1018405 : 4356.]$$

Therefore

$$AB : BF < 1009\tfrac{1}{6} : 66 \qquad (6)$$

Fourthly, let the angle BAF be bisected by AG meeting the circle in G.

Then

$$AG : GB\ [= BA + AF : BF]$$
$$< 2016\tfrac{1}{6} : 66, \text{ by (5) and (6)}.$$

[And

$$AB^2 : BG^2 < \{(2016\tfrac{1}{6})^2 + 66^2\} : 66^2$$
$$< 4069284\tfrac{1}{36} : 4356.]$$

Therefore

$$AB : BG < 2017\tfrac{1}{4} : 66,$$

whence

$$BG : AB > 66 : 2017\tfrac{1}{4} \qquad (7)$$

[Now the angle BAG which is the result of the fourth bisection of the angle BAC, or of one-third of a right angle, is equal to one-fortyeighth of a right angle.

Thus the angle subtended by BG at the centre is

$$\tfrac{1}{24} \text{ (a right angle).]}$$

Therefore BG is a side of a regular inscribed polygon of 96 sides.

It follows from (7) that

$$\text{(perimeter of polygon)} : AB\ [> 96 \times 66 : 2017\tfrac{1}{4}]$$
$$> 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

And

$$\frac{6336}{2017\tfrac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Much more then is the circumference to the diameter

$$< 3\tfrac{1}{7} \text{ but } > 3\tfrac{10}{71}.$$

36

From *Quadrature of the Parabola*: Introduction and Propositions 17–24*

– ARCHIMEDES

Introduction

Archimedes to Dositheus greeting.

When I heard that Conon, who was my friend in his lifetime, was dead, but that you were acquainted with Conon and withal versed in geometry, while I grieved for the loss not only of a friend but of an admirable mathematician, I set myself the task of communicating to you, as I had intended to send to Conon, a certain geometrical theorem which had not been investigated before but has now been investigated by me, and which I first discovered by means of mechanics and then exhibited by means of geometry. Now some of the earlier geometers tried to prove it possible to find a rectilineal area equal to a given circle and a given segment of a circle; and after that they endeavoured to square the area bounded by the section of the whole cone and a straight line, assuming lemmas not easily conceded, so that it was recognised by most people that the problem was not solved. But I am not aware that any one of my predecessors has attempted to square the segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola], of which problem I have now discovered the solution. For it is here shown that every segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola] is four-thirds of the triangle which has the same base and equal height with the segment, and for the demonstration of this property the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of (two) unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area. The earlier geometers have also used this lemma; for it is by the use of this same lemma that they have shown that circles are to one another in the duplicate ratio of their diameters, and that spheres are to one another in the triplicate ratio of their diameters, and further that every pyramid is one third part of the prism which has the same base with the pyramid and equal height; also, that every cone is one third part of the cylinder having the same base as the cone and equal height they proved by assuming a certain lemma similar to that aforesaid. And, in the result, each of the aforesaid theorems has been accepted no less than those proved without the lemma. As therefore my work now published has satisfied the same test as the propositions referred to, I have written out the proof and send it to you, first as investigated by means of mechanics, and afterwards too as demonstrated by geometry. Prefixed are, also, the elementary propositions in conics which are of service in the proof. *Farewell.*

...

* SOURCE: Reprinted with permission from Thomas L. Heath, ed., *The Works of Archimedes* (Dover Edition, 1953), 233–34 and 246–52. Copyright © 1897 Cambridge University Press.

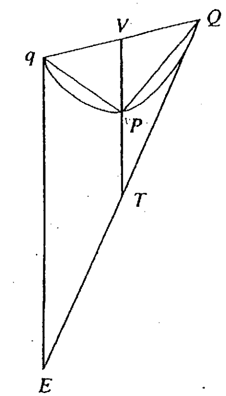
PROPOSITION 17

It is now manifest that *the area of any segment of a parabola is four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.*

Let Qq be the base of the segment, P its vertex. Then PQq is the inscribed triangle with the same base as the segment and equal height.

Since P is the vertex* of the segment, the diameter through P bisects Qq. Let V be the point of bisection.

Let VP, and qE drawn parallel to it, meet the tangent at Q in T, E respectively.



Then, by parallels,

$$qE = 2VT,$$

and

$$PV = PT, \qquad \text{[Prop. 2]}$$

so that

$$VT = 2PV.$$

Hence $\Delta EqQ = 4\Delta PQq$. But, by Prop. 16, the area of the segment is equal to $\frac{1}{3}\Delta EqQ$.

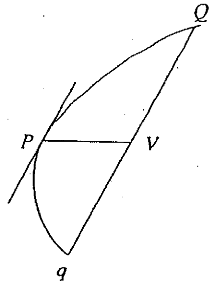
Therefore (area of segment) $= \frac{4}{3}\Delta PQq$.

DEF. "In segments bounded by a straight line and any curve I call the straight line the **base**, and the **height** the greatest perpendicular drawn from the curve to the base of the segment, and the **vertex** the point from which the greatest perpendicular is drawn."

PROPOSITION 18

If Qq be the base of a segment of a parabola, and V the middle point of Qq, and if the

* It is curious that Archimedes uses the terms *base* and *vertex* of a segment here, but gives the definition of them later (at the end of the proposition). Moreover he assumes the converse of the property proved in Prop. 18.—T. L. Heath.



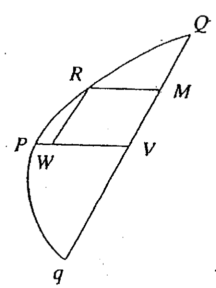
diameter through V meet the curve in P, then P is the vertex of the segment.

For Qq is parallel to the tangent at P [Prop. 1] Therefore, of all the perpendiculars which can be drawn from points on the segment to the base Qq, that from P is the greatest. Hence, by the definition, P is the vertex of the segment.

PROPOSITION 19

If Qq be a chord of a parabola bisected in V by the diameter PV, and if RM be a diameter bisecting QV in M, and RW be the ordinate from R to PV, then

$$PV = \tfrac{4}{3}RM.$$



For, by the property of the parabola,

$$PV:PW = QV^2:RW^2$$
$$= 4RW^2:RW^2,$$

so that

$$PV = 4PW,$$

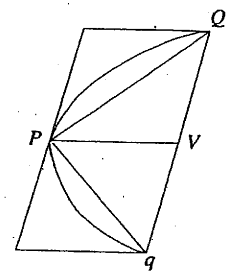
whence

$$PV = \tfrac{4}{3}RM.$$

PROPOSITION 20

If Qq be the base, and P the vertex, of a parabolic segment, then the triangle PQq is greater than half the segment PQq.

For the chord Qq is parallel to the tangent at P, and the triangle PQq is half the parallelogram formed by Qq, the tangent at P, and the diameters through Q, q.



Therefore the triangle PQq is greater than half the segment.

COR. It follows that *it is possible to inscribe in the segment a polygon such that the segments left over are together less than any assigned area.*

PROPOSITION 21

If Qq be the base, and P the vertex, of any parabolic segment, and if R be the vertex of the segment cut off by PQ, then

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ.$$

The diameter through R will bisect the chord PQ, and therefore also QV, where PV is the diameter bisecting Qq. Let the diameter through R bisect PQ in Y and QV in M. Join PM.

By Prop. 19,

$$PV = \tfrac{4}{3}RM.$$

Also

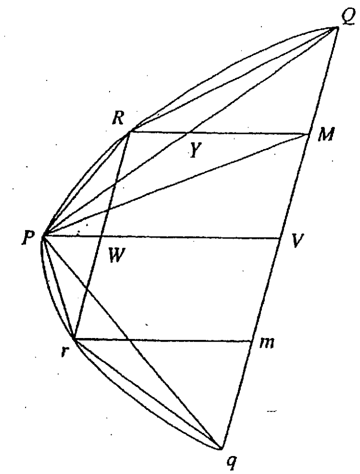
$$PV = 2YM.$$

Therefore

$$YM = 2RY,$$

and

$$\Delta PQM = 2\Delta PRQ.$$



Hence

$$\Delta PQV = 4\Delta PRQ,$$

and

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ.$$

Also, if RW, the ordinate from R to PV, be produced to meet the curve again in r,

$$RW = rW,$$

and the same proof shows that

$$\Delta PQq = 8\Delta Prq.$$

PROPOSITION 22

If there be a series of areas A, B, C, D, . . . each of which is four times the next in order, and if the largest, A, be equal to the triangle PQq inscribed in a parabolic segment PQq and having the same base with it and equal height, then

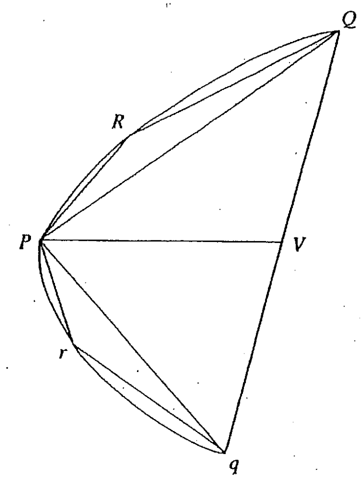
$$(A + B + C + D + \ldots) < \text{(area of segment } PQq\text{)}.$$

For, since $\Delta PQq = 8\Delta PRQ = 8\Delta Pqr$, where R, r are the vertices of the segments cut off by PQ, PQ, as in the last proposition,

$$\Delta Pqq = 4(\Delta PQR + \Delta Pqr).$$

Therefore, since $\Delta PQq = A$,

$$\Delta PQR + \Delta Pqr = B.$$



In like manner we prove that the triangles similarly inscribed in the remaining segments are together equal to the area C, and so on.

Therefore $A + B + C + D + \cdots$ is equal to the area of a certain inscribed polygon, and is therefore less than the area of the segment.

PROPOSITION 23

Given a series of areas A, B, C, D, . . . Z, of which A is the greatest, and each is equal to four times the next in order, then

$$A + B + C + \cdots + Z + \tfrac{1}{3}Z = \tfrac{4}{3}A.$$

Take areas $b, c, d, \ldots$ such that $b = \tfrac{1}{3}B$, $c = \tfrac{1}{3}C$, $d = \tfrac{1}{3}D$, and so on.

Then, since $b = \tfrac{1}{3}B$, and $B = \tfrac{1}{4}A$, $B + b = \tfrac{1}{3}A$. Similarly $C + c = \tfrac{1}{3}B$.

Therefore

$$B + C + D + \cdots + Z + b + c + d + \cdots + z = \tfrac{1}{3}(A + B + C + \cdots + Y).$$

But

$$b + c + d + \cdots + y = \tfrac{1}{3}(B + C + D + \cdots + Y).$$

Therefore, by subtraction,

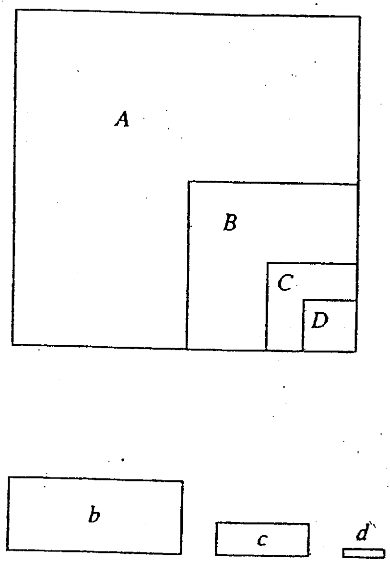
$$B + C + D + \cdots + Z + z = \tfrac{1}{3}A$$

or

$$A + B + C + \cdots + Z + \tfrac{1}{3}Z = \tfrac{4}{3}A.$$

[The algebraical equivalent of this result is of course

$$1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{4})^{n-1}$$
$$= \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$
$$= \frac{1 - (\tfrac{1}{4})^n}{1 - \tfrac{1}{4}}.]$$



PROPOSITION 24

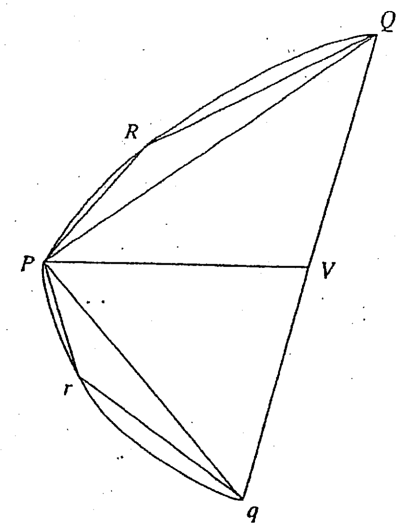
Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.

Suppose $K = \tfrac{4}{3}\Delta PQq$, where P is the vertex of the segment; and we have then to prove that the area of the segment is equal to K.

For, if the segment be not equal to K, it must either be greater or less.

I. Suppose the area of the segment greater than K.

If then we inscribe in the segments cut off by PQ, Pq triangles which have the same base and equal height, i.e., triangles with the same vertices R, r as those of the segments, and if in the remaining segments we inscribe triangles in the same manner, and so on, we shall finally have



segments remaining whose sum is less than the area by which the segment PQq exceeds K.

Therefore the polygon so formed must be greater than the area K; which is impossible, since [Prop. 23]

$$A + B + C + \cdots + Z < \tfrac{4}{3} A,$$

where $A = \Delta PQq$.

Thus the area of the segment cannot be greater than K.

II. Suppose, if possible, that the area of the segment is less than K.

If then $\Delta PQq = A$, $B = \tfrac{1}{4}A$, $C = \tfrac{1}{4}B$, and so on, until we arrive at an area X such that X is less than the difference between K and the segment, we have

$$A + B + C + \cdots + X + \tfrac{1}{3}X$$
$$= \tfrac{4}{3}A \qquad \text{[Prop. 23]}$$
$$= K.$$

Now, since K exceeds $A + B + C + \cdots + X$ by an area less than X, and the area of the segment by an area greater than X, it follows that

$$A + B + C + \cdots + X > \text{(the segment)};$$

which is impossible, by Prop. 22 above.

Hence the segment is not less than K.

Thus, since the segment is neither greater nor less than K,

$$\text{(area of segment } PQq) = K = \tfrac{4}{3}\,\Delta PQq.$$

V. OMAR KHAYYAM OG GEOMETRISK LØSNING AF TREDJEGRADSLIGNINGER

V.1. Forhistorien

Medens vi ikke kender andengradsproblemer, der er ældre end løsningsprocedurer for andengradsligninger, forholder det sig anderledes med tredjegradsproblemer og løsninger af de tilsvarende ligninger. Tredjegradsproblemer støder man jævnligt på gennem historien, men en systematisk behandling af tredjegradsligninger finder først sted i arabisk matematik omkring år 1000. I dette afsnit skal vi se på nogle af de tidlige tredjegradsproblemer, og i de følgende afsnit vil vi beskæftige os med behandlingen af tredjegradsligninger i arabisk matematik.

De babylonske tekster indeholder nogle få eksempler på tredjegradsproblemer. Der angives ingen anden metode til at løse disse end at benytte tabeller over $n^3 + n^2$ eller n^3 (jvf. afsnit I.3 og I.9).

Den græske matematik indeholder flere interessante tredjegradsproblemer, blandt dem to af de såkaldte tre klassiske problemer. Disse tre problemer er: cirklens kvadratur, der kræver konstruktion af et kvadrat med samme areal som en given cirkel; terningens fordobling, hvor man skal konstruere en terning, hvis rumfang er det dobbelte af en given ternings rumfang; vinklens tredeling, hvilket vil sige at konstruere en vinkel der er en tredjedel af en given vinkel. Når de to sidste problemer formuleres algebraisk, fører de til tredjegradsligninger. (Om problemernes historie og den algebraiske behandling af dem kan man læse i Lützen 1985).

Der er imidlertid ingen vidnesbyrd om, at de græske matematikere opfattede problemet om vinklens tredeling som andet end en geometrisk opgave. Terningens fordobling, derimod, nærmede de sig på en måde, som kan fortolkes algebraisk, omend ikke direkte som en tredjegradsligning. For os ville det være naturligt at sætte den givne ternings volumen lig med 1 og søge den side med længden x, der opfylder $x^3 = 2$. Sådan gjorde de græske matematikere ikke, men sagde, at det gjaldt om at finde to liniestykker x og y, så

$$1:x = x:y = y:2 \,. \tag{1}$$

At dette fører til det ønskede x ses af, at

$$1^3:x^3 = (1:x)^3 = (1:x)(x:y)(y:2) = 1:2 \,.$$

Blandt de græske løsningsforslag til (1) var at finde x og y som skæringspunkter mellem

$$\text{parablen} \quad y = x^2 \quad \text{og} \quad \text{parablen} \quad 2x = y^2 \,,$$

eller som skæringspunkter mellem

$$\text{parablen} \quad y = x^2 \quad \text{og} \quad \text{hyperblen} \; xy = 2 \,.$$

Sammenhængen mellem løsningerne og problemet ses ved at gange over i de enkelte ligninger i (1). Netop skæring mellem keglesnit kom til at spille en stor rolle ved løsning af de tidlige tredjegradsproblemer.

I afhandlingen Om kuglen og cylindren (3. århundrede f. Kr.) formulerede Archimedes følgende problem:

> Del en given kugle med en plan, så de to volumener har et givet forhold.

For at løse problemet foretog Archimedes først et skridt, der svarer til at se på ligningen

$$\frac{4r^2}{x^2} = \frac{(3r-x)(m+n)}{mr} , \qquad (2)$$

hvor r er den givne radius og m:n det givne forhold (jvf. opgave V.1). Archimedes lovede derefter, at han ved en senere lejlighed ville vise, hvorledes man løser opgaver, der - i vor notation - har form af at bestemme x fra ligningen

$$x^2(a-x) = b^2c . \qquad (3)$$

Hvis Archimedes virkeligt gjorde dette skriftligt, er hans manuskript gået tabt. Senere græske matematikere foreslog en løsning til (3), som de mente var i overensstemmelse med Archimedes'. Den gik ud på at finde skæringen mellem

parablen $ax^2 = b^2y$ og hyperblen $(a-x)y = ac$.

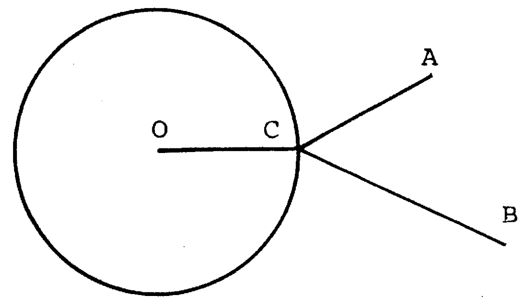
Der findes i den græske matematik en del flere eksempler på opgaver med deling af figurer, der svarer til tredjegradsligninger, ofte ret simple; f.eks. så Heron (1. århundrede e.Kr., jvf. afsnit III.1) på nogle eksempler, der fører til ligningen $x^3 = \frac{m}{n} a^3$, hvor a og m:n er kendte.

De arabiske matematikere studerede de græske tredjegrads problemer og fandt nye løsningsmetoder, men stadig nogle, der benyttede skæringer mellem kurver. Endvidere beskæftigede de sig med andre opgaver, der også ledte til bestemmelse af rødder i tredje- eller fjerdegradsligninger. Således lykkedes det for al-Bīrūnī (973 - ca. 1050) at vise, at man kan bestemme sider i nogle regulære polygoner som rødder i tredjegradsligninger. Til konstruktion af en regulær 18-kant søgte han korden til 20° i en enhedscirkel; kalder vi denne x, fandt han en ligning, der svarer til

$$x^3 + 1 = 3x \quad \text{(jvf. opgave V.2).} \qquad (4)$$

Også optikken leverede sådanne ligninger. Det kendteste eksempel stammer fra al-Haithams undersøgelser om spejling i cylindriske spejle. (Al-Haitham, på latin kaldet al-Hazan, levede i det 11. århundrede):

> I en plan er der givet en cirkel med centrum i O og to punkter, A og B, uden for cirklen; man skal bestemme C på cirklen, så $\sphericalangle OCA = \sphericalangle OCB$ (figur V.1).



Figur V.1.

Al-Haitham omformede problemet, så man i stedet skulle bestemme en rod i en fjerdegradsligning; denne fandt han ved at skære en cirkel med en hyperbel.

Atter andre tredjegradsproblemer kom fra aritmetikken som f.eks. dette (opgave V.3):

> 10 skal deles i to dele, således at summen af kvadraterne på delene og kvotienten mellem den største og den mindste del er 72.

Efterhånden var der så mange tredjegradsligninger, at de arabiske matematikere følte, at en systematisk undersøgelse var tiltrængt. En af de første - og blandt dem sikkert den eleganteste - generelle behandling af tredjegradsligninger findes stadig overleveret.

V.2. Omar Khayyam

Forfatteren til det lige omtalte arbejde levede fra engang i 1040'erne til omkring 1130 og hed Omar ibn Ibrāhīm al Nisaburī al Khayyam, Ghiyāth al-Dīn abu'l Fath. Hans navn forkortes som regel til Omar Khayyam - al Khayyami betyder teltmager, hvorfor det må formodes, at en af Omars forfædre har haft denne profession. I vide kredse er Omar Khayyam bedst kendt som filosof og digter. Hans digtsamling Rubaiyat, bestående af firelinjede persiske strofer, udgives stadig, også på dansk (figur V.2).

Det livssyn, der kommer til udtryk i Omar Khayyams digte, var avanceret for hans tid og blev af nogle opfattet som kættersk og anstødeligt. Følgelig vekslede Omar Khayyam mellem at stå i gunst eller være i unåde hos forskellige sultaner og deres rådgivere, og han kom til at rejse meget rundt i den arabiske verden. Her fandt han blandt andet arbejde som astronom - hvilket på hans tid indbefattede at være astrolog for de ledende kredse. I midten af 1070'erne blev Omar Khayyam udnævnt til leder af observatoriet i Isfahan og til at forestå en planlagt kalenderreform; denne blev dog på grund af politisk uro aldrig ført ud i livet.

Jeg gik, da jeg var ung, med ivrigt Sind
til hellige og lærde, hvor et Spind
af Argumenter hang — men altid kom
jeg ud ad samme Dør, hvor jeg kom ind.

Jeg hjalp dem Visdoms Kerner ud at saa
og ventede de nye, grønne Straa,
men denne Kundskab blev min hele Høst:
»Jeg kom som Vandet, skal som Vinden gaa.«

Hvorfor jeg kom hertil, jeg aldrig tyder.
Og ej *hvorfra:* Jeg lever. Bækken flyder.
Jeg drager bort, som Vinden gennem Ørk —
hvorhen veed ikke jeg. Jeg dør. Jeg lyder.

Fra Dybets syvende Port jeg Slaaen skød,
steg til Saturn, mens undervejs jeg brød
saa mangen Gaades Segl, men ej det Segl,
der lukker for vor Skæbne og vor Død.

Der var en Dør, min Evne aabned ej,
en Taage, hvor omsonst jeg søgte Vej.
Jeg syntes, du og jeg blev nævnt en Stund.
Saa talte ingen mer om dig og mig.

Figur V.2. Et udvalg af digte fra Rubaiyat i Thøger Larsens oversættelse (Larsen 1948, p. 13).

Beskæftigelsen med astronomi krævede en del matematisk indsigt, men Omar Khayyam drev studiet af matematik langt videre end astronomien krævede. Et af de emner han tog op var uddragning af kvadrat- og højere ordens rødder. Et andet var ligningsteorien, og herom skrev han i 1070'erne bogen Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l muqābala ("Afhandling om bevis for problemer om fuldstændiggørelse og sammenligning"- angående betydning af de sidste ord se side 88). Det er her vi finder hans betragtninger om tredjegradsligninger.

Omar Khayyam delte ligninger til og med tredje grad op i grupper efter hvor mange led de indeholder, og inden for hver gruppe så han på de forskellige typer, der fremkommer, når man kræver, at koefficienterne skal være positive; i alt betragtede han 25 forskellige typer. Hans fremstilling af teorien for andengradsligninger bragte ikke meget nyt i forhold til al-Khwārizmīs og abu Kamils arbejder (kapitel IV). Dog understregede han, at de geometriske konstruktioner, der var indeholdt i de geometriske beviser for rigtigheden af løsningsprocedurerne, alle var konstruktioner, der kunne foretages med cirkler og linier, dvs. konstruktionen, der forekommer i Euklids Elementer (jvf. afsnittene II.8 og III.7).

Videre hævdede Omar Khayyam, at ved løsning af tredjegradsligninger kan man ikke længere klare sig med Euklids teori, men må tage Apollonios' Keglesnitslære i brug. René Descartes genfremsatte i 1637 den påstand, at rødderne i en tredjegradsligning i almindelighed ikke kan konstrueres med cirkler og linier (jvf. afsnit VIII.2), men først et par hundrede år senere var man i stand til at bevise dette (jfr. Lützen 1985).

Den græske geometriske konstruktion af rødder i andengradsligninger kan forholdsvis nemt oversættes til algebra, så man får en løsningsformel ud af den (jvf. afsnit II.8). Det kan de græske og arabiske geometriske metoder til bestemmelse af løsninger i tredjegradsligninger derimod ikke. Alligevel spekulerede Omar Khayyam på, om det ikke var muligt algebraisk at beregne rødderne og skrev herom:

> hverken vi eller nogen af dem, der beskæftiger sig med algebra har været i stand til at vise denne ligning [dvs. finde et algebraisk udtryk for roden], måske vil andre, der følger efter os, være i stand til at udfylde dette hul (Omar Khayyam 1931, p. 49).

Omar Khayyams forudsigelse var rigtig. Det blev muligt for hans efterfølgere at udtrykke rødder i tredjegradsligningen algebraisk; men den tid, der gik inden dette skete, var sikkert længere end han forestillede sig, nemlig næsten fem hundrede år - dette vender vi tilbage til i kapitel VII.

I næste afsnit er der vist eksempler på, hvorledes Omar Khayyam løste treleddede ligninger bestående af et tredje- og førstegradsled og en konstant. Han opfattede alle leddene som tredimensionale, hvorfor man i en oversættelse til moderne notation kommer hans tankegang nærmest, hvis man tænker sig ligningerne givet på formerne

$$x^3 + p^2x = p^2q \quad \text{og} \quad x^3 + p^2q = p^2x \ .$$

Man kan endvidere bemærke, at Omar Khayyam ikke tyede til taleksempler, når han skulle forklare sine procedurer.

3-4

V.3. Uddrag af Omar Khayyams algebra

Ved Guds hjælp og hans uvurderlige bistand siger jeg, at algebra er en videnskabelig kunst. Den beskæftiger sig med absolutte tal og målelige størrelser, der selv om de er ubekendte knytter sig til kendte ting på en sådan måde, at de kan bestemmes... Hvad man søger efter i den algebraiske kunst, er relationer, der leder fra det kendte til det ubekendte, hvis opdagelse som sagt netop er algebraens mål. Fuldkommengørelsen af denne kunst består i kendskabet til den videnskabelige metode ved hjælp af hvilken man bestemmer aritmetiske og geometriske ubekendte.

. . .

Det er sædvane blandt algebraikere, at de i deres kunst kalder det ubekendte, der skal bestemmes, en »ting«, produktet af det med sig selv et »kvadrat«, produktet af kvadratet og tingen selv en »terning«, produktet af kvadratet med sig selv et »kvadrat-kvadrat«, produktet af en terning med sig selv en »terning-terning« og så videre, så langt som processen udføres.

. . .

Det er nødvendigt at vide, at denne afhandling kun kan forstås af dem, som grundigt kender Euklids bøger, *Elementerne* og *Data*, såvel som de to første bøger af Apollonios' *Keglesnitslære*. De, der mangler kendskab til en af disse bøger, kan umuligt forstå mit arbejde. Det er ikke uden besvær, at det er lykkedes mig at begrænse mig til de tre nævnte værker.

Algebraiske løsninger opnås kun ved hjælp af ligninger, det vil sige ved den velkendte metode at sætte disse grader lig med hinanden. Hvis en algebraiker skulle bruge et kvadrat-kvadrat til måling af arealer, ville hans resultat være figurativt, og ikke virkeligt, fordi det er umuligt at betragte kvadrat-kvadratet som en målelig størrelse. Hvad vi har af målelige størrelser, er den første dimension, som er »roden« eller i forhold til kvadratet, »siden«, den anden dimension som repræsenterer overfladen... og endelig den tredje dimension der repræsenterer rumfanget. Terningen befinder sig mellem de målelige størrelser, da den er en kasse begrænset af seks kvadrater. Men da der ikke er flere dimensioner, hører kvadrat-kvadratet ikke til blandt de målelige størrelser, og dette er endnu mere tilfældet for de højere grader.

. . .

I algebraikernes bøger finder man i relation til de fire geometriske størrelser — absolutte tal, sider, kvadrater og terninger — tre ligninger, der omfatter tal, sider og kvadrater. Vi skal derimod præsentere metoder, ved hvis hjælp man kan bestemme den ubekendte i en ligning, omfattende de fire grader, der, som vi lige har forme den ubekendte i en ligning, omfattende de fire grader, der, som vi lige har forklaret, er de eneste, der hører til de målelige størrelser, nemlig tallet, tingen, kvadratet og terningen.

For de typer af ligninger, hvor beviset [for løsningsproceduren] kun afhænger af cirklens egenskaber... er det let at gennemføre dette.

. . .

٢٠

اب الى كد فيكون نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة هط الى بد فقاعدتا المجسمين مكافئتان (١) لارتفاعيهما فهما متساويان وذلك ما اردنا ان نبين

ومن بعد ذلك فانا نأتى (٢) بالصنف الثالث من المفردات وهو كعب يعدل عددا (3) نضع (*) العدد مجسم (4) ابجد وقاعدته اج وهو مربع الواحد كما قلنا وطوله مثل العدد المفروض ونريد ان نعمل مكعبا مساويا له فنأخذ بين خطى اب بد (5) خطين وسطين فى النسبة فيكونان معلومى القدر كما بيناه (6) وهما ه ز ونجعل حط مساويا لخط ه ونعمل عليه مكعب طحكل فيكون هذا المكعب معلوم القدر وضلعه معلوم القدر فاقول انه مساو لمجسم د برهانه نسبة مربع اج الى مربع طك كنسبة اب الى حك مثناة ونسبة اب الى حك مثناة كنسبة اب الى ز الاول الى الثالث من الخطوط الاربعة بل كنسبة (7) حك الثانى الى بد الرابع فقاعدتا مكعب ل ومجسم د مكافئتان (8) لارتفاعيهما فهما (9) متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين (١٠)

ومن بعد ذلك فانا نشتغل بالاصناف الستة الباقية الثلاثية (١١) الصنف الاول هو (١٢) مكعب واضلاع (١3) تعدل عددا (١4) نضع (**) اب ضلع مربع (١5) مساو لعدة الجذور وهو مفروض ونعمل مجسما يكون قاعدته مثل مربع اب ويكون ارتفاعه مثل بج ويكون مساويا للعدد المفروض كما بينا عمله فيما تقدم ونجعل بج عمودا على اب وقد علمت

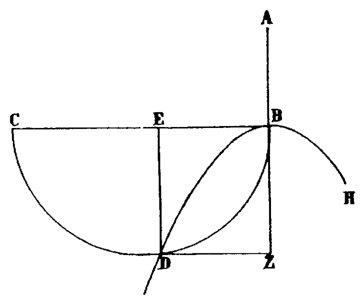
Figur V.3. Et eksempel på den arabiske tekst, der ligger til grund for denne oversættelse (Omar Khayyam 1851, side 20).

Efter at have præsenteret de typer af ligninger, som det har været muligt at bevise ved hjælp af cirklens egenskaber, det vil sige ved hjælp af Euklids bøger, vil vi diskutere nogle af de typer, som kun kan bevises, når keglesnittenes egenskaber inddrages. Disse indeholder 14 typer: en simpel ligning, nemlig *et tal lig med en terning;* seks treleddede ligninger, og syv fireleddede ligninger.

. . .

Vi skal nu beskæftige os med... de seks treleddede ligninger.

Den første type: *En terning og sider er lig med et tal.* Lad linien AB være lig med siden i et kvadrat, der er lig med antallet af rødder, denne side er givet. Konstruer dernæst en kasse, hvis grundflade er lig med kvadratet på AB og hvis rumfang er lig med det givne tal; denne konstruktion har vi allerede beskrevet i det foregående. Lad BC være kassens højde[1], og tegn BC vinkelret på AB [figur V.4]...

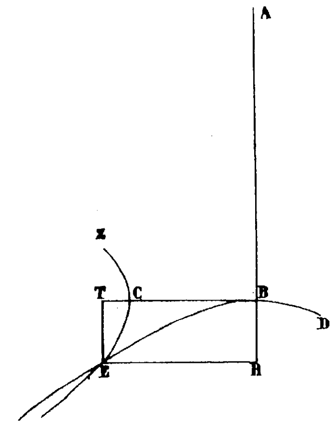


Figur V.4. Denne figur forekommer som figur 17 i Omar Khayyam 1851.

Forlæng AB til Z og tegn en parabel med toppunkt i punktet B, akse BZ og parameter AB.[2] Det giver keglesnittet HBD, dets beliggenhed er kendt, som vi har forklaret tidligere, og det tangerer linien BC.

Over BC tegnes en halvcirkel, der nødvendigvis må skære keglesnittet. Lad skæringspunktet være D; fra D, hvis beliggenhed er kendt, nedfældes to vinkelrette DZ og DE på BZ og BC. Såvel beliggenheden som størrelsen af disse kendes. Liniestykket DZ er ordinat i keglesnittet, derfor er dets kvadrat lig med produktet af BZ og AB. Det vil sige, at AB forholder sig til DZ, der er lig med BE, ligesom BE forholder sig til ED, der er lig med ZB. Men forholdet mellem BE og ED er lig med forholdet mellem ED og EC.[3]

Således er de fire liniestykker AB, BE, ED og EC i fortsat proportion, hvorfor kvadratet på den første, parametren AB, forholder sig til kvadratet på den anden, BE, ligesom den anden, BE, forholder sig til den fjerde, EC.[4] Så vil den kasse, hvis grundflade er kvadratet på AB og hvis højde er EC, være lig med terningen på BE, idet højderne i disse er omvendt proportionale med deres grundflader.[5]



Figur V.5. Denne figur forekommer som figur 18 i Omar Khayyam 1851.

Lad den kasse, hvis grundflade er kvadratet på AB og hvis højde er EB, blive lagt til dem begge. Terningen på BE plus denne kasse er da lig med den kasse, hvis grundflade er kvadratet på AB og hvis højde er BC, altså den kasse, der var antaget at være lig med det givne tal. Videre er den kasse, hvis grundflade er kvadratet på AB, der var lig med antallet af rødder, og hvis højde er EB, der er siden i terningen, lig med det givne antal sider i terningen på EB. Derfor er terningen på EB plus det givne antal af dens sider lig med det givne tal, hvilket skulle opnås.[6]

Denne type giver ikke anledning til forskellige tilfælde eller umulige problemer.[7] Den er blevet løst ved at kombinere parablens og cirklens egenskaber.

Den anden type: *En terning og et tal er lig med sider.* Lad linien AB [figur V.5] være siden i et kvadrat, der er lig med antallet af rødder, og konstruer en kasse, hvis grundflade er lig med kvadratet på AB, og hvis rumfang er lig med det givne tal, og lad dens højde BC være vinkelret på AB. Tegn en parabel med toppunkt i punktet B, akse i AB's retning og parameter AB. Det giver kurven DBE, hvis position er kendt. Tegn også et andet keglesnit, nemlig en hyperbel, der har C som toppunkt, akse i BC's retning, og såvel parameter som diameter lig med BC, det er kurven ECZ.[8] Denne hyperbels position er også kendt, sådan som Apollonios viste det i den 58. sætning i første bog.[9] Disse to keglesnit vil enten mødes eller ikke mødes. Hvis de ikke mødes, er problemet umuligt. Hvis de mødes, det være sig tangentialt i et punkt eller ved skæring i to punkter, så er skæringspunktets position kendt.[10]

. . .

Det er klart, at denne type omfatter vanskelige tilfælde, og at nogle af de problemer, der hører til den, er umulige.[11] Den er løst ved hjælp af egenskaber ved to keglesnit, parablen og hyperblen. [Oversat fra Omar Khayyam 1851, pp. 5-8, 28, 32-36, Omar Khayyam 1931, pp. 47-49, 70, 75-78 og Omar Khayyam 1981, pp. 13-16, 31, 35-38.]

V.4. Omar Khayyams øvrige løsninger

I det kapitel, hvorfra uddraget i sidste afsnit stammer, behandler Omar Khayyam yderligere 4 typer af treleddede tredjegradsligninger, først

$$x^3 = p^2x + p^2q \;, \tag{5}$$

som han løser ved at finde skæring mellem en cirkel og en hyperbel, medens han løser resten ved at skære en hyperbel med en parabel. Allerede for ligningstypen (5) er der en del specialtilfælde at holde styr på, afhængig af p's og q's størrelser (jvf. opgave VII.5). Problemet med disse specialtilfælde bliver endnu større ved undersøgelsen af de fireleddede ligninger; som Omar Khayyam i øvrigt for alle typers vedkommende løser ved at finde skæringspunkter mellem to hyperbler eller mellem en cirkel og en hyperbel.

I forbindelse med sine undersøgelser af ligningstypen

$$x^3 + p^2x + p^2q = rx^2$$

nævner Omar Khayyam et eksempel på en opgave, der fører til denne ligning, nemlig det aritmetiske eksempel nævnt side 113 (jvf. opgave V.3), derefter fortsætter han:

> Den udmærkede geometer, Abu'l-Jud eller al-Shanni, løste denne opgave efter at mange af Iraks fremragende matematikere forgæves havde forsøgt at løse den... Må Gud vise dem barmhjertighed. Men han, der løste det problem (må Gud belønne ham) bemærkede ikke - på trods af sine store matematiske kundskaber - de forskellige tilfælde af problemer af denne type, selv om der blandt dem er umulige tilfælde. Gud alene kender sandheden. (Omar Khayyam 1931, pp. 92-93)

Gud synes ikke at have videregivet hele denne til Omar Khayyam, thi ved løsningen af typen

$$x^3 + p^2x = rx^2 + p^2q \;,$$

der foregår ved at finde skæring mellem en cirkel og en hyperbel, finder han ikke frem til det tilfælde, hvor ligningen har <u>tre</u> positive rødder.

I sit valg af konstruktionskurver har Omar Khayyam tilsyneladende ladet sig lede af, hvilke kurver der lettest kunne genkendes i ligningen. Han har således ikke forsøgt at holde sig til et bestemt keglesnit. I bogen <u>La Géométrie</u> (1637) viste Descartes, at det kan lade sig gøre at konstruere rødderne i tredjegradsligninger uden andengradsled, og fjerdegradsligninger uden tredjegradsled, ved at finde skæringer mellem parablen $y = x^2$ og en cirkel (opgave V.5). (Leddet af næsthøjeste grad skaffede Descartes sig af med ved at forøge eller formindske den ukendte med en konstant (jvf. "omskrivningsregler" side 215)). Men Descartes havde unægteligt også en bedre notation til sin rådighed end sine arabiske forgængere, nemlig den han selv havde fundet, og som vi stadig benytter.

Omar Khayyam afsluttede sin algebra med at omtale ligninger som f.eks. den, der moderne skrives

$$\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} = 3\,\frac{3}{8} \,.$$

En sådan omformede han til en tredjegradsligning. Han nævnte også et problem, der kunne føre til en fjerdegradsligning, nemlig det der svarer til

$$x^2 + 2x = 2 + \frac{2}{x^2} \;,$$

og hævdede, at der ikke findes nogen metode til at løse sådanne problemer.

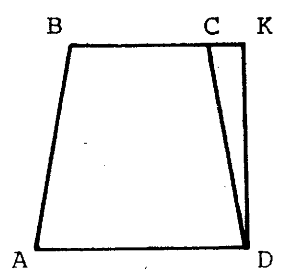
3-7

V.5. Fjerdegradsligninger

De arabiske matematikere efter Omar Khayyam beskæftigede sig videre med ligningsteorien og inddrog efterhånden også fjerdegradsligninger. Løsningen til disse fandtes, ligesom løsningerne til tredjegradsligningerne, som skæring mellem keglesnit.

Der dukkede også geometriske problemer op, der førte til fjerdegradslignnger. For eksempel findes i et anonymt manuskript følgende opgave:

Konstruer et trapez ABCD (figur V.6) så siderne $AB = CD = AD = 10$, og så trapezets areal er 90. (Juschkewitsch 1964, p. 267).



Figur V.6.

Nedfældes den vinkelrette DK på BC og sættes $CK = x$ gælder der, at højden i trapezet er $\sqrt{100-x^2}$ og dets areal er $(10-x)\sqrt{100-x^2}$, hvoraf fås

$$x^4 + 2000x = 20x^3 + 1900 .$$

Det er os ikke bekendt, om der i arabisk matematik findes forsøg på at gennemgå fjerdegradsligningerne systematisk. En af de mest betydningsfulde matematikere i perioden

omkring 1400, al-Kaši, nævner i sin bog Aritmetikkens Nøgle, at han har til hensigt at skrive om alle 70 typer af fjerdegradsligninger (der er nu 'kun' 65), men det er uvist, om han nogensinde fik det gjort. Foretagendet synes også meget omfattende, allerede for tredjegradsligningens vedkommende var det svært at holde styr på løsningsbetingelserne, og disse bliver endnu mere uoverskuelige for fjerdegradsligningen, specielt når man skulle udtrykke sig verbalt og splitte op i så mange typer.

Næste gang fjerdegradsligningen dukker op i historien koncentrerer man sig om algebraiske løsninger, dette skal vi vende tilbage til i afsnit VII.7.

V.6. Opgaver til kapitel V

Opgave V.1

Volumenet af en kuglekalot med højde h, er, når radius i kuglen er r:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) .$$

Benyt dette til at indse, at formel (2) side 112 er rigtig.

Indse derefter, at den tredjegradsligning, der kommer ud af formlen, er af den type, der er beskrevet i (3).

Vis endelig, at man kan finde en løsning til denne ligning ved at opsøge skæringspunkter mellem den nævnte parabel og hyperbel.

Opgave V.2

Al-Bīrūnī brugte mange trekanter til at udlede et udtryk svarende til ligning .4) side 112. Vis ved hjælp af formlen

$$4\sin^3 v + \sin 3v = 3\sin v$$

at x = korden $(20^\circ) = 2\sin(10^\circ)$ tilfredsstiller ligning (4).

Opgave V.3

Vis at det mindste af tallene i det aritmetiske eksempel side 113 er rod i ligningen

$$x^3 + 13\tfrac{1}{2}x + 5 = 10x^2 ,$$

og indse, at denne ligning blandt andre har roden 2.

Opgave V.4

Vis at den procedure Omar Khayyam beskriver til at løse den første type af treleddede ligninger (afsnit V.3) svarer til følgende: Ligningen

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

løses ved at opsøge det skæringspunkt mellem

parablen $py = x^2$ og cirklen $(x - \frac{q}{2})^2 + y^2 = (\frac{q}{2})^2$,

der ikke er toppunkt i parablen.

Opgave V.5

For alle reelle værdier af p og q konstruerede Descartes rødderne i tredjegradsligningen

$$x^3 = px + q \qquad (\Delta)$$

i La Géométrie (1637) ved at opsøge skæringspunkterne mellem cirklen

$$(x - \frac{1}{2}q)^2 + (y - \frac{1}{2}(p+1))^2 = \frac{1}{4}(q^2 + (p+1)^2)$$

og parablen $y = x^2$.

Vis, at bortset fra skæringspunktet (0,0), vil abscisserne til eventuelle skæringspunkter mellem de to kurver være rødder i (Δ).

V.7. Noter til kapitel V

1. På sin egen måde udtrykker Omar Khayyam, hvordan han antager, at ligningen er givet på formen

   $$x^3 + p^2x = p^2q , \qquad q > 0 ,$$

   og at han sætter AB = p og BC = q.

2. Det vil sige, at parablens ligning i et koordinatsystem, der har toppunkt i B og er orienteret så BC og BZ er positive, er $py = x^2$, $p > 0$.

3. Da CB er diameter i cirklen, er trekant CDB retvinklet. Omar Khayyam benytter en klassisk sætning i elementær geometri, der tidligere var meget anvendt, nemlig: højden i en retvinklet trekant er mellemproportional mellem de to stykker, hvori den deler hypotenusen; det vil sige BE:ED = ED:EC. Sætningen kan indses ved at benytte, at ΔECD og ΔEDB er ensvinklede.

4. Omar Khayyam har nu vist at

   AB:BE = BE:ED = ED:EC, (*)

   man siger at de fire liniestykker er i fortsat proportion (jvf. den græske løsning af terningens fordobling nævnt side 111). Af (*) følger at

W-9

$$(AB)^2 : (BE)^2 = (AB:BE)(AB:BE) = (BE:ED)(ED:EC)$$
$$= BE:EC \quad . \qquad (**) \quad .$$

5. Med den omvendte proportionalitet mener Omar Khayyam (jvf. (**) i note 4), at $(AB)^2 : (BE)^2 = BE:EC$, hvoraf der direkte følger, at

$$(AB)^2\ EC = (BE)^3 .$$

6. Lader vi $BE = x$ og, som i note 1, $AB = p$ og $BC = q$, udtrykker relationen i note 5, at

$$p^2 (q - x) = x^3 \quad .$$

Ved at lægge p^2x til på begge sider, finder Omar Khayyam, at

$$x^3 + p^2x = p^2q \quad ,$$

det vil sige, at liniestykket $x = DZ = BE$, konstrueret ved at skære parablen med cirklen, er løsning i den givne ligning.

7. Ligningen $x^3 + p^2x = p^2q$, $q > 0$, har præcis en positiv rod. Hvilket ses af, at

$$f(x) = x^3 + p^2x - p^2q$$

er voksende ($f'(x) = 3x^2 + p^2 > 0$) og $f(0) < 0$.
For andre typer af tredjegradsligninger afhænger røddernes fortegn af forholdet mellem koefficienterne, og nogle har kun negative rødder (jvf. opgaverne 5 og 6 side 183).

8. Omar Khayyam benytter her nogle tekniske termer til at definere hyperblen; vi skal ikke komme ind på disse,

men indskrænke os til følgende forklaring:
Hvis et koordinatsystem vælges således, at den parabel, Omar Khayyam indfører - på samme måde som i første eksempel - har ligningen

$$py = x^2$$

så har hyperblen ligningen

$$y^2 = x(x - q) \quad .$$

Af kurven betragter Omar Khayyam kun højre halvdel - svarende til $x > 0$.

9. I klassiske og moderne udgaver af Apollonios er der tale om sætning 53 i bog I af Keglesnitslæren.

10. I resten af afsnittet viser Omar Khayyam, at eventuelle skæringspunkter mellem parablen og hyperblen (jvf. note 8) virkelig opfylder den givne ligning:

$$x^3 + p^2q = p^2x \quad .$$

Hans bevis er ikke medtaget, da det - som han selv sagde i indledningen - kræver en stor fortrolighed med keglesnitslæren.

11. I opgave 6 side 183 kan man se, hvorledes røddernes antal og fortegn afhænger af koefficienterne i ligningen $x^3 + p^2q = p^2x$.

Litteratur

A.P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig 1964.

Jesper Lützen, Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra, Herning 1985.

Omar Khayyam, L'algèbre d'Omar al Khayyami (ed. F. Woepcke), Paris 1851.

Omar Khayyam, The Algebra of Omar Khayyam (ed. D.S. Kasir), New York 1931.

Omar Khayyam, L'Oeuvre Algébrique d'al Khayyam (ed. R. Rashed et A. Djebbar), Aleppo 1981.

Omar Khayyam, Rubaiyat. Digtsamlingen er flere gange oversat til dansk og er udkommet separat eller i samlinger. Den findes bl.a. i Larsen 1948.

Thøger Larsen, Fra Andre Tungemaal, København 1948.

J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik (se side 50).

Kirsti Andersen

Inge Andersen
Kirsti Andersen
Kirsten Garm
Klaus Holth
Ivan Tafteberg Jakobsen
Lars Mejlbo

1986
ISBN 87-88049-09-4

KILDER OG KOMMENTARER TIL LIGNINGERNES HISTORIE

Redigeret af Kirsti Andersen

3-11

Trip FORLAG

3.12

From the *Ars Magna**

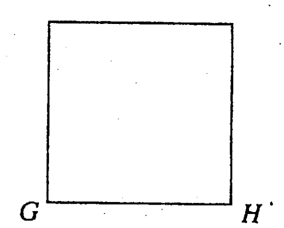
– GIROLAMO CARDANO

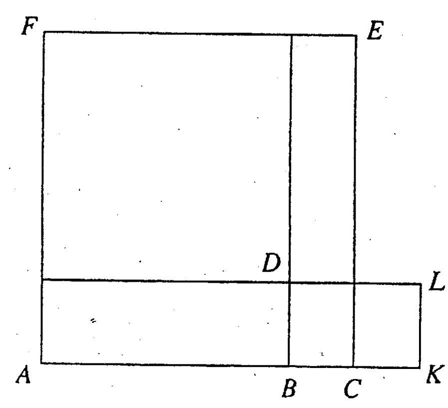
Chapter XI. On the Cube and First Power Equal to the Number

Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in response to my entreaties, though withholding the demonstration.† Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.

DEMONSTRATION

For example, let GH^3 plus six times its side GH equal 20, and let AE and CL be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of AC, the side [of one], and CK, the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x].





In accordance with the first proposition of the sixth chapter of this book, I complete the bodies DA, DC, DE, and DF; and as DC represents BC^3, so DF represents AB^3, DA represents $3(BC \times AB^2)$ and DE represents $3(AB \times BC^2)$.[1] Since, therefore, $AC \times CK$ equals 2, $AC \times 3CK$ will equal 6, the coefficient of x; therefore $AB \times 3(AC \times CK)$ makes $6x$ or $6AB$,[2] wherefore three times the product of AB, BC, and AC is $6AB$. Now the difference between AC^3 and CK^3—manifesting itself as BC^3, which is equal to this by supposition—is 20, and from the first proposition of the sixth chapter is

* SOURCE: From Girolamo Cardano, *The Great Art or Rules of Algebra*, trans. by T. Richard Witmer (1968), 96–99 and 218–20. Reprinted with permission of the MIT Press. Footnotes renumbered.

† In 1539, Tartaglia gave Cardano his method in obscure verses that begin as follows:

Quando che'l cubo con le case appresso
Se agguaglia a qualche numero discreto
Trovan dui altri, differenti in esso . . .

When x^3 together with px
Are equal to a q
Then take u and v, $u \neq v$

3.13

the sum of the bodies DA, DE, and DF. Therefore these three bodies equal 20.

Now assume that BC is negative:

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2),$$

by that demonstration. The difference between $3(BC \times AC^2)$ and $3(AC \times BC^2)$, however, is [three times] the product of AB, BC, and AC. Therefore, since this, as was demonstrated, is equal to $6AB$, add $6AB$ to the product of $3(AC \times BC^2)$, making $3(BC \times AC^2)$. But since BC is negative, it is now clear that $3(BC \times AC^2)$ is negative and the remainder which is equal to it is positive. Therefore,

$$3(CB \times AB^2) + 3(AC \times BC^2) + 6AB = 0.$$[3]

It will be seen, therefore, that as much as is the difference between AC^3 and BC^3, so much is the sum of

$$AC^3 + 3(AC \times CB^2) + 3(-CB \times AC^2) + (-BC^3) + 6AB.$$

This, therefore, is 20 and, since the difference between AC^3 and BC^3 is 20, then, by the second proposition of the sixth chapter, assuming BC to be negative,

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times BC^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2).$$

Therefore since we now agree that

$$AB^3 + 6AB^{[4]} = AC^3 + 3(AC \times BC^2) + 3(-BC \times AC^{2[5]}) + (-BC^3) + 6AB,$$

which equals 20, as has been proved, they [i.e., $AB^3 + 6AB$] will equal 20. Since, therefore,

$$AB^3 + 6AB = 20,$$

and since

$$GH^3 + 6GH = 20,$$

it will be seen at once and from what is said in I, 35 and XI, 31 of the *Elements* that GH will equal AB. Therefore GH is the difference between AC and CB. AC and CB, or AC and CK, the coefficients, however, are lines containing a surface equal to one-third the coefficient of x and their cubes differ by the constant of the equation. Whence we have the rule:

RULE

Cube one-third the coefficient of x; add to it the square of one-half the constant of the equation; and take the square root of the whole. You will duplicate[6] this, and to one of the two you add one-half the number you have already squared and from the other you subtract one-half the same. You will then have a *binomium* and its *apotome*. Then, subtracting the cube root of the *apotome* from the cube root of the *binomium*, the remainder [or] that which is left is the value of x.[7]

For example,

$$x^3 + 6x = 20.$$

Cube 2, one-third of 6, making 8; square 10, one-half the constant; 100 results. Add 100 and 8, making 108, the square root of which is $\sqrt{108}$. This you will duplicate: to one add 10, one-half the constant, and from the other subtract the same. Thus you will obtain the *binomium* $\sqrt{108} + 10$ and its *apotome* $\sqrt{108} - 10$. Take the cube roots of these. Subtract [the cube root of the] *apotome* from that of the *binomium* and you will have the value of x:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}^{[8]} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

[In modern notation the chapters beginning with Eleven deal with the following problems:

11. $x^3 + ax = b$
12. $x^3 = ax + b$
13. $x^3 + a = bx$
14. $x^3 = ax^2 + b$
15. $x^3 + ax^2 = b$
16. $x^3 + a = bx^2$
17. $x^3 + ax^2 + bx = c$
18. $x^3 + ax = bx^2 + c$
19. $x^3 + ax^2 = bx + c$
20. $x^3 = ax^2 + bx + c$
21. $x^3 + a = bx^2 + cx$
22. $x^3 + ax + b = cx^2$
23. $x^3 + ax^2 + b = cx$
24. On 44 derivative equations, including $x^6 + 6x^4 = 100$
25. On imperfect and particular rules

3.14

Chapter 26 and subsequent chapters also examine biquadratic equations.

The following example, Problem III in Chapter 37, involves imaginary numbers. Modern notation has been substituted into the problem.]

Chapter XXXVII

PROBLEM III

Likewise, if I say I have 12 *aurei* more than Francis and the square of mine is 128 more than the cube of Francis' *aurei*, we let Francis have $-x$ and I have 12 *aurei* minus x. This square of mine is $144 + x^2 - 24x$, and this is equal to $-x^3 + 128$. Therefore

$$16 + x^2 + x^3 = 24x,$$

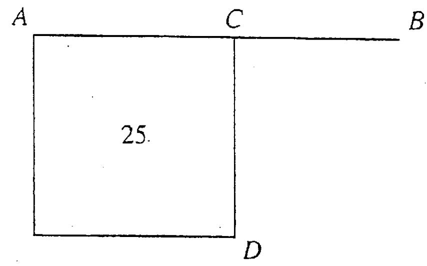
wherefore x is 4, and so much in the negative is what Francis lacks. I have 8 *aurei* of my own.

RULE II

The second species of negative assumption involves the square root of a negative. I will give an example: If it should be said, Divide 10 into two parts the product of which is 30 or 40, it is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus: We divide 10 into two equal parts, making each 5. These we square, making 25. Subtract 40, if you will, from the 25 thus produced, as I showed you in the chapter on operations in the sixth[9] book, leaving a remainder of -15, the square root of which added to or subtracted from 5 gives parts the product of which is 40. These will be $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$.

DEMONSTRATION

In order that a true understanding of this rule may appear, let AB be a line which we will say is 10 and which is divided into two parts, the rectangle based on which must be 40. Forty, however, is four times 10; wherefore we wish to quadruple the whole of AB. Now let AD be the square of AC, one-half of AB, and from AD subtract $4AB$, ignoring the number.[10] The square root of the remainder, then—if anything remains—added to



or subtracted from AC shows the parts. But since such a remainder is negative, you will have to imagine $\sqrt{-15}$—that is, the difference between AD and $4AB$—which you add to or subtract from AC, and you will have that which you seek, namely $5 + \sqrt{25 - 40}$ and $5 - \sqrt{25 - 40}$, or $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$. Putting aside the mental tortures involved,[11] multiply $5 + \sqrt{-15}$ by $5 - \sqrt{-15}$, making $25 - (-15)$ which is $+15$. Hence this product is 40. Yet the nature of AD is not the same as that of 40 or of AB, since a surface is far from the nature of a number and from that of a line, though somewhat closer to the latter. This truly is sophisticated,[12] since with it one cannot carry out the operations one can in the case of a pure negative and other [numbers]. [Likewise,] one cannot determine what it [the solution] is by adding the square of one-half the [given] number to the number to be produced and to or from the square root of this sum adding and subtracting half that which is to be divided.[13] For example, in this case you could divide 10 into two parts whose product is 40; add 25, the square of one-half of 10, to 40, making 65; from the square root of this subtract 5 and also add 5 to it; you then have parts with the likeness of $\sqrt{65} + 5$ and $\sqrt{65} - 5$. [But] while these numbers differ by 10, their sum is $\sqrt{260}$, not 10. So progresses arithmetic subtlety the end of which, as is said, is as refined as it is useless.

Witmer's Notes

1. 1570 and 1663 vary considerably from here on to the end of the demonstration. They read:

We will have, therefore, four propositions, two of which have already been mentioned—namely, that $AC \times CK$ or CB is 2 and that the difference between AC^3 and CB^3 is 20.

3.15

The third can be deduced from these and is that, since the product of $3AB \times BC \times AC$ is equal to the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA and that $3AB \times AC \times BC$ is $6AB$ for, from the first proposition, the product of AC and CB is 2, therefore three times this is 6, and this product times AB is $6AB$. This, however, is the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA. The fourth [proposition], which derives from the second and third corollaries in the sixth chapter, [is] that DF [i.e., AB^3] is the difference between $AC^3 + 3(AC \times CB^2)$ and $CB^3 + 3(CB \times AC^2)$. Let, therefore, α be AC^3, β BC^3 [the text has ABC^3], γ $3CB \times AC^2$, δ $3AC \times CB^2$, ϵ the difference between α and β, ζ the difference between γ and δ, and η [1570 has β; 1663's character is illegible] the difference between $\alpha + \delta$ and $\beta + \gamma$. Therefore [there is what appears to be a superfluous *cum* inserted at this point] ϵ is composed of $\zeta + \eta$ [1570 again has a β and again 1663's character is illegible], as can readily be demonstrated numerically and by example as shown in the margin. But ϵ is 20, from the second assumption, ζ is $6AB$, and η [1570's character is illegible and 1663 has θ] is AB^3. Therefore, $AB^3 + 6AB$—that is, plus $6x$, for AB is the root of its cube—is equal to 20. Therefore, since $GH^3 + 6GH$ [the text has $BH^3 + 6BH$ here and the next place it occurs] is equal to 20, $GH^3 + 6GH$ will be equal to $AB^3 + 6AB$. Hence AB is x and this is the difference between two sides the product of which is 2 and the cubes of which differ by 20, which was to be demonstrated. From this we construct the rule.

$$20\left|\begin{array}{cc} 24 & 1 \\ & \\ 4 & 14 \end{array}\right| 13 \left|\begin{array}{c} 25 \\ \\ 18 \end{array}\right| 7$$

As it is obvious from the preceding the text of 1570 and 1663 is quite corrupt. These items are especially bothersome:

(1) the *differentiae DE et DA* which occurs twice. To make sense, we have either to assume, as I have here, that *differentia* is an error for *aggregatum* or that, in the earlier definitions of DA as *triplus CB in quadratum AB* and of DE *as triplus, AB in quadratum BC*, AB should be replaced by AC. Either is consistent with the later development of the argument.

(2) the *cubus abc* which I read as a typographical error for *cubus bc*.

(3) the confusion between eta, beta, and theta at various points.

(4) the misprinting of BH for GH at four places.

2. *fiunt 6 res AB, seu sexcuplum AB.*

[3]. *faciunt nihil.*

[4]. The text has a spare *cum* at this point, as though something more were to be added.

[5]. 1545 has AB^2.

6. 1545 has *seminabis*; 1570 and 1663 have *servabis*. The former, corrected to read *geminabis* in accord with later passages, is followed here.

7. I.e., if $x^3 + ax = N$, $x = \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (N/2)^2} + N/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (N/2)^2} - N/2}$.

[8]. 1570 and 1663 have ℞ *b: cub:* ℞ 108 *p:* 10, the *b:* being a misprint for *v:*.

9. 1570 and 1663 have "fourth."

10. *absque numero.*

11. *dismissis incruciationibus.* We may perhaps suspect Cardano of indulging in a play on words here, for this can also be translated "the cross-multiple having canceled out," with the whole sentence then reading, "Multiply $5 + \sqrt{-15}$ by $5 - \sqrt{-15}$ and, the cross-multiples having canceled out, the result is $25 - (-15)$, which is $+15$." Cf. the translation of this passage by Professor Vera Sanford in David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* (New York, 1959 reprint), I, 202.

12. In the 38th problem of the *Ars Magna Arithmeticae*, Cardano remarks: "Note that $\sqrt{9}$ is either a $+3$ or -3, for a plus [times a plus] or a minus times a minus yields a plus. Therefore $\sqrt{-9}$ is neither $+3$ nor -3 but is some recondite third sort of thing" (*quaedam tertia natura abscondita*).

13. *quae vere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in aliis, operationes exercere licet, nec venari quid sit* [1663 at this point puts a period and inserts *Modus*] *est ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, et a* ℞ *aggregati minuas ac addas dimidium dividendi.*

4-59

Matematikkens historie

Odense

Pierre Fermat

Opgaver om Fermat. På følgende sider er der tre tekster, der i en anden forbindelse har fået fået betegnelserne kilde III-V. Læs og diskuter disse, eventuelt støttet af de opgaver, der er formuleret side 8.

Kirsti Andersen

Kilde III fra A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (ed. D.J. Struik), Harvard University Press, Cambridge Mass. 1969, pp. 222-223.

FERMAT. MAXIMA AND MINIMA

(1) ON A METHOD FOR THE EVALUATION OF MAXIMA AND MINIMA[1]

The whole theory of evaluation of maxima and minima presupposes two unknown quantities and the following rule:

Let a be any unknown of the problem (which is in one, two, or three dimensions, depending on the formulation of the problem). Let us indicate the maximum or minimum by a in terms which could be of any degree. We shall now replace the original unknown a by $a + e$ and we shall express thus the maximum or minimum quantity in terms of a and e involving any degree. We shall adequate [*adégaler*], to use Diophantus' term, the two expressions of the maximum or minimum quantity and we shall take out their common terms. Now it turns out that both sides will contain terms in e or its powers. We shall divide all terms by e, or by a higher power of e, so that e will be completely removed from at least one of the terms. We suppress then all the terms in which e or one of its powers will still appear, and we shall equate the others; or, if one of the expressions vanishes, we shall equate, which is the same thing, the positive and negative terms. The solution of this last equation will yield the value of a, which will lead to the maximum or minimum, by using again the original expression.

Here is an example:

To divide the segment AC [Fig. 1] *at E so that AE × EC may be a maximum.*

Fig. 1 

We write $AC = b$; let a be one of the segments, so that the other will be $b - a$, and the product, the maximum of which is to be found, will be $ba - a^2$. Let now $a + e$ be the first segment of b; the second will be $b - a - e$, and the product of the segments, $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$; this must be adequated with the preceding: $ba - a^2$. Suppressing common terms: $be \sim 2ae + e$. Suppressing e: $b = 2a$.[3] To solve the problem we must consequently take the half of b.

We can hardly expect a more general method.

[1] This paper was sent by Fermat to Father Marin Mersenne, who forwarded it to Descartes. Descartes received it in January 1638. It became the subject of a polemic discussion between him and Fermat (*Oeuvres*, I, 133).

[3] Our notation is modern. For instance, where we have written (following the French translation in *Oeuvres*, III,122) $be \sim 2ae + e^2$, Fermat wrote: B in E adaequabitur A in E bis + Eq (Eq standing for E quadratum). The symbol $\sim$ is used for "adequates."

4-56

Kilde IV: Méthode de Maximis et Minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes, juin 1638. Oversættelse fra Oeuvres de Fermat, vol. II (ed. P. Tannery & C. Henry), Paris 1904, pp. 154-157.

Den generelle metode til at finde tangenter til kurver fortjener at blive forklaret bedre, end det synes at være sket.

Lad der være givet en kurve ZCA med akse CB (fig. 1). Lad der endvidere på kurven være givet punktet A, hvorfra ordinaten AB til aksen er trukket.

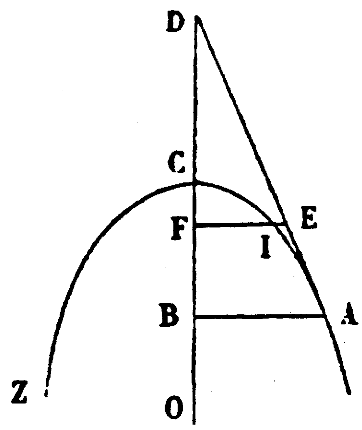


Fig. 1

Tangenten AD ønskes bestemt, hvor D er skæringspunktet mellem tangenten og den forlængede akse.

Liniestykkerne AB og BC er givne, lad os kalde BA for B og BC for D. Lad os kalde det søgte liniestykke BD for A. Lad os vælge et tilfældigt punkt s E på tangenten og derfra trække EF parallel med AB, og lad os antage, at liniestykket BF er E.

Så vil CF være $D-E$, FE være $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ [1], og ligegyldigt hvilken kurve der betragtes, giver vi altid disse betegnelser til liniestykkerne CF og FE.

Når dette er gjort, er det sikkert, at punktet E på linien EF og tangenten ikke ligger på kurven. Følgelig vil EF være større eller mindre end ordinaten til kurven trukket fra F..... Selv om FE er forskellig fra ordinaten trukket fra F til kurven, betragter jeg den ikke destomindre som værende lig med ordinaten, og sammenligner den derefter ved adéquation [sideligning] med liniestykket FI, idet kurvens specifikke egenskaber benyttes.

[Her skitserer Fermat bestemmelsen af en parabeltangent.]

1. Dette betyder $\frac{B \cdot A - B \cdot E}{A}$

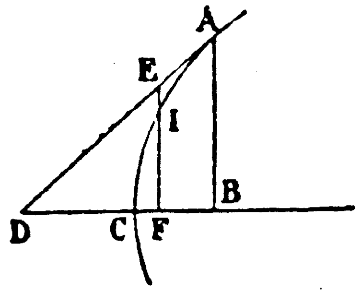


Fig. 2

For at De kan se, at metoden er generel, og at den med lignende lethed kan anvendes på alle slags problemer, vil vi som et andet eksempel anvende den på den kurve, som hr. Descartes har foreslået.

Lad kurven CA (fig. 2) have den egenskab, at når man tager et vilkårligt punkt på den, som A, og nedfælder den vinkelrette AB, så vil de to kuber på CB og BA være lig med det parallelepipedum der er dannet af et givet liniestykke, N, og de to liniestykker CB og BA^2.

Lad os antage, at tingen allerede er udført [dvs. at tangenten til kurven i punktet A er fundet] , og at vi har givet navne til liniestykkerne BD, BC, BA, CF og FE som før.

Betegnelsen for de to kuber på CF og FE er

$$D\,cub. - E\,cub. - Dq. \text{ in } E.3 + D \text{ in } Eq.3 \quad 3$$
$$+ \frac{B\,cub. \text{ in } A\,cub. - B\,cub. \text{ in } E\,cub. - B\,cub. \text{ in } Aq. \text{ in } E.3 + B\,cub. \text{ in } A \text{ in } Eq.3}{A\,cub.} \quad 3 \;;$$

betegnelsen for legemet dannet af N, CF og FE er

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } A - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E - N \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E + N \text{ in } B \text{ in } Eq.}{A}.$$

Når alt er blevet ganget med *A cub*, må man sideligne

$$Dc. \text{ in } Ac. - Ec. \text{ in } Ac. - Dq. \text{ in } E \text{ in } Ac.3 + D \text{ in } Eq. \text{ in } Ac.3 \quad 3$$
$$+ Bc. \text{ in } Ac. - Bc. \text{ in } Ec. - Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } E.3 + Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } Eq.3$$

med

$$N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac. - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Aq.$$
$$- N \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Ac. + N \text{ in } B \text{ in } Eq. \text{ in } Aq.$$

2. Med sædvanlige koordinatbetegnelser har kurven ligningen $x^3 + y^3 = kxy$, hvor k er en konstant.

4-58

Vi udelader de fælles led, dvs.

$$Dc. \text{ in } Ac. + Bc. \text{ in } Ac.,$$

og

$$N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac.,$$

der ifølge kurvens egenskaber er lige store, fordi de to kuber *Dc.* og *Bc.*, svarende til kuberne på de to liniestykker BC og BA, er lig med legemet *N* in *D* in *B*, som svarer til legemet dannet af det givne liniestykke og de to liniestykker BC og BA. Vi dividerer resten med *E*, og udelader derefter alt hvor der endnu er et *E*, der vil da til rest være

Dq. in *A* ter[4] + *B cub.* ter lig med *N* in *D* in *B* + *N* in *B* in *A*,

og således får vi

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B = B\ cub.\ \text{ter}}{Dq.\ \text{ter} = N \text{ in } B} \quad \text{lig med } A\ ,$$

hvilket skulle findes. Vi har efter Viète's metode brugt to linier $=$ til at markere en mangel.....

4. Dq in Ater betyder $3D^2A$.

Kilde V. Fermats brev til Brûlart de Saint-Martin, 31. marts 1643. Oversat fra Oeuvres de Fermat (ed. M.C. de Waard) vol. V, supplément, Paris 1922, pp. 121-125.

Min bestemmelse af *Maxima* og *minima* hviler kun på to eller tre ting.

Jeg antager for det første, at denne undersøgelse fører til et punkt eller til et entydigt udtryk, som når man f.eks. vil dele en linie på en sådan måde, at rektanglet under afsnittene er lig med et givet areal. Der er to punkter på linien, som tilfredsstiller problemet, men når man søger den største af alle disse rektangler, er der kun et enkelt punkt, der kan tilfredsstille det, og dette punkt er i det fremsatte eksempel det, som deler linien i to lige store dele. Det er derfor, Pappos i den 7.bog altid kalder et maximum for unicam et singularem (entydigt og singulært), og tilsvarende for et minimum; det græske ord er μοναχὸς, som har forbavset Commandino så stærkt, at han ganske åbent indrømmer, at han ikke har forstået, hvad Pappos har villet sige med dette udtryk.

Det er altså nødvendigt at søge et entydigt punkt, på begge sider af hvilket alle problemets led enten altid er større eller altid er mindre end det, som frembringes af det fundne punkt.

Det er således vigtigt at sammenligne det entydige punkt med dem, som kan tænkes på hver side. Dette kan ikke gøres bekvemt ved en enkelt position; for hvis vi kalder den linie*, som giver os det entydige punkt, for A, er det nødvendigt dertil at tilføje eller fratrække en anden størrelse for at finde forholdet mellem det entydige punkt og de punkter, som ligger på begge sider af det. For at lave en sammenligning med et andet punkt, valgt vilkårligt på den ene eller den anden side af det entydige punkt, kan vi kalde den dertil svarende linie for A + E; og på ganske samme måde kan vi, for at lave en sammenligning med et andet punkt, valgt på den anden side af det entydige punkt, kalde den dertil svarende linie for A - E, idet den ene fås ved addition og

* Fermat siger linie, hvor vi ville sige liniestykke.

den anden ved subtraktion. Det er derfor nødvendigt at finde en metode, ved hjælp af hvilken $A + E$ og $A - E$ giver samme udtryk til bestemmelse af A, således at det omtalte udtryk A repræsenterer midtpunktet. Alt hvad der findes på hver side af det, tiltager eller aftager, alt efter om vi søger den største eller den mindste.
Det viser sig imidlertid, at min metode giver det samme for $A + E$ som for $A - E$, hvilket erfaringen og fornuften straks vil vise Dem. Thi $A - E$ giver altid de samme led som $A + E$, der er kun den forskel at de ulige potenser har modsatte fortegn, hvilket ikke ændrer ligningen.

Det viser sig således, at $A + E$ giver samme ligning som $A - E$ ved min metode. Men dette er ikke helt tilstrækkeligt, thi hvis det kun drejede sig om at finde den samme ligning ved hjælp af $A + E$ som ved $A - E$, kunne vi lige så godt tage de to led, som f.eks. indeholder E^2 eller E^3, etc., som dem, der kun indeholder E, og sideligne dem, hvilket imidlertid ikke ville føre til noget. Det er derfor nødvendigt, foruden den foregående regel, som siger, at $A + E$ giver samme ligning som $A - E$, også at tage en anden regel, som siger, at hvis $A + E$ giver mindre end A, så giver $A - E$ også mindre end A, og på samme måde, hvis $A + E$ giver mere end A, giver $A - E$ også mere end A.

Jeg udtrykker mig f.eks. på følgende måde: Del en linie, således at legemet dannet af det ene led og kvadratet på det andet, bliver så stort som muligt.

Lad A være en af liniens dele, som bestemmer det entydige punkt; da vil legemet være, idet [hele] linien er givet ved B: $BA^2 - A^3$.

$A + E$ giver:

$$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 + 2BAE - 3A^2E - E^3;$$

$A - E$ giver:

$$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3.$$

Hvis vi tager de led, som kun har et E, får vi alt i alt fra de to udtryk i $A + E$ og i $A - E$, den samme ligning, thi det er nødvendigt i dem begge at sætte $2BAE$ lig med $3A^2E$. Hvis vi tager de led, som indeholder E^2, vil vi få den samme ligning fra $A + E$ som fra $A - E$, thi i dem begge er det nødvendigt at sætte BE^2 lig med $3AE^2$. Der må derfor redegøres for, hvorfor vi hellere skal tage E alene end en af dens potenser.

4-61

Det vil sige, at det er nødvendigt, at de homogene størrelser, som sammenlignes med $BA^2 - A^3$, i begge situationer er mindre end $BA^2 - A^3$. Det er altså nødvendigt, at

$$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 + 2BAE - 3A^2E - E^3 \text{ er mindre end } BA^2 - A^3,$$

og at

$$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3 \text{ også er mindre end } BA^2 - A^3,$$

hvilket kun kan ske ved at sideligne de led indbyrdes, som bestemmes ved den laveste potens i E, som her er E. Grunden hertil er, at de led, som er bestemt ved den laveste potens i E, altid har et større forhold indbyrdes end de, som er bestemt ved E^2 eller ved E^3 etc., og de som er bestemt ved E^2, har et større forhold indbyrdes end dem, som er bestemt ved E^3, E^4 etc. Som i dette eksempel, idet vi tager $A + E$ og laver en ligning i de to led bestemt ved E alene, får vi på den ene side $2BAE$, på den anden $3A^2E$; men $2BAE$ har et større forhold til $3A^2E$ end (idet vi tager de to led bestemt ved E^2) BE^2 til $3AE^2$... Hvis vi altså sideligner $2BAE$ med $3A^2E$, vil BE^2 være mindre end $3AE^2$.

Vi viser på denne måde, at alle leddene markeret med + vil være mindre end dem, der er markeret med - . Den sidste potens af E, som altid står alene, og som her er E^3, ændrer - uanset med hvilket fortegn den er markeret - intet ved ligningens beskaffenhed, hvilket vi klart kan se ved en enkel betragtning. Den principielle grund til dette er, at de to led der er markeret med E^2, har et større forhold end dem der er bestemt ved potenser højere end E^2. De [leddene med E^2] tjener derfor som nøgle til at bestemme det største eller det mindste. Hvis således leddet markeret med + er mindre end leddet markeret med - , ender undersøgelserne med en bestemmelse af det største, og hvis leddet markeret med + er større end leddet markeret med - , er der tale om det mindste. Hvis vi bruger [udtrykket] for $A - E$, har de to led bestemt ved E^2 de samme fortegn [som leddene i udtrykket for $A + E$]. Hvorfor de led der er markeret med fortegnet + er mindre end dem der er markeret med - [hvis det er tilfældet i udtrykket for $A + E$].

Metoden og argumenterne, som jeg har fremført her, er generelle.

4-62

Opgave til kilde III

Fermat taler om udtryk i a, hvis ekstrema skal bestemmes. Tænk på disse som polynomier i a, og beskriv de skridt, der er indeholdt i Fermats procedure til bestemmelse af ekstrema for et polynomium.

Anvend endvidere proceduren på

$$a^3 + ba^2 + da + f \; .$$

Opgave til kilde IV

i Læs den første side og bemærk, at Fermat <u>ikke</u> hævder, at tangentbestemmelse er en ekstremalopgave, men at proceduren med at 'sideligne' fra maximums- og minimumsmetoden kan bruges, når FI erstattes med FE i kurvens ligning.

ii Når kurven ZCA er en parabel, benytter Fermat relationen:

$$BC : CF = BA^2 : FI^2 \; .$$

Erstat heri FI med FE og lighedstegnet med et 'sidelighedstegn', indfør nogle symboler, og brug Fermats procedure til at bestemme BD.

iii Læs resten og redegør for Fermats regninger.

Opgave til kilde V

Pierre Brûlart opfordrede Fermat til at bevise sin ekstremalmetode. Fermat svarede med det brev, der er oversat i kilde V. Læs brevet, tillad den anakronisme at kalde det udtryk i A, som Fermat ønsker at bestemme ekstrema for, f(A), og redegør for at Fermat betragter udviklingerne

$$f(A+E) = f(A) + p(A)E + q(A)E^2 + r(A)E^3 + \dots$$

$$f(A-E) = f(A) - p(A)E + q(A)E^2 - r(A)E^3 + \dots$$

Redegør endvidere for, at Fermat søger et argument for, at den A værdi, der giver ekstremum, bestemmes af ligningen $p(A) = 0$, og at han har en intuitiv forståelse for, at arten af ekstremaet bestemmes af q(A)'s fortegn, men at hans argument er forkert.

Siger Fermat noget om størrelsen af E?