JESPER LÜTZEN

Opgave 29

I de forskellige udgaver af Legendre's "Elements de Géometrie" gav forfatteren flere forskellige "beviser" for at Euklids parallelpostulat følger fra de øvrige postulater. Fælles for dem alle er at han faktisk prøver at bevise den ækvivalente sætning at vinkelsummen i en trekant er 180° (eller to rette vinkler). Beviset føres indirekte. Først viser han (korrekt) at man når til en modstrid ved at antage at vinkelsummen i en trekant er større end to rette. Dernæst "viser" han at antagelsen om en vinkelsum mindre end to rette fører til modstrid, hvor fra han konkluderer at vinkelsummen må være lig to rette. Nedenfor er angivet to versioner af det sidste modstridbevis der begge stammer fra 4. udgaven (1802) (her i engelsk oversættelse fra Fauvel og Gray i "The History of mathematics. A Reader").

1. Gennemgå beviserne og find fejlene.
2. Hvilke vigtige sætninger i ikke-euklidisk geometri bevises implicit undervej. (Ikke-euklidisk geometri er en geometri hvori parallelpostulatet er erstattet af et andet, f.eks. at vinkelsummen i en trekant er mindre end to rette).

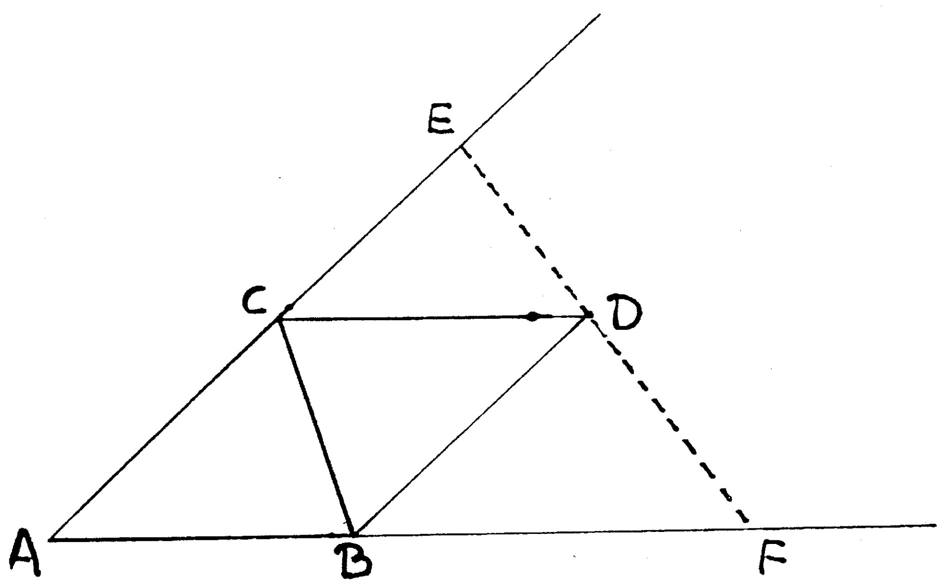
(a) Let ABC be the given triangle and suppose, if possible, that the sum of its angles is $= 2P - Z$, P denoting a right angle, and Z an arbitrary quantity, such that one supposes the sum of the angles to be less than two right angles.

Let A be the smallest angle of triangle ABC and on the opposite side make angle $BCD = ABC$, and angle $CBD = ACB$; the triangles BCD, ABC will be equal, as they have an equal side BC adjacent to two pairs of equal angles. Through the point D draw an arbitrary line EF which meets the extended sides of the angle A.

Since the sum of the angles of each triangle ABC, BCD is $2P - Z$ and that of each triangle EBD, DCF cannot exceed $2P$ [by Legendre's immediately preceding theorem] it follows that the sum of the angles of the four triangles ABC, BCD, EBD, DCF cannot exceed $4P - 2Z + 4P$ or $8P - 2Z$. If one removes the angles at B, C, D, which make $6P$, from this sum, since the sum of the angles at each of B, C, D is $2P$ the remainder will be equal to the sum of the angles of triangle AEF. Therefore the sum of the angles of triangle AEF cannot exceed $8P - 2Z - 6P$ or $2P - 2Z$.

So, while it is necessary to add Z to the sum of the angles of triangle ABC to make two right angles, it is necessary to add at least $2Z$ to the angles of the triangle AEF to make it likewise up to two right angles.

By means of triangle DEF one similarly constructs a third triangle such that one must add at least $4Z$ to the sum of its three angles to make the total equal to two right angles; and by means of the third one constructs a fourth, to which it is necessary to add at least $8Z$ to the sum of its angles to make the total equal to two right angles, and so on.



Now, however small Z is with respect to the right angle P, the sequence $Z, 2Z, 4Z, 8Z$ etc, whose terms increase by doubling, eventually yields a term equal to or greater than $2P$. One is thereby led to a triangle to which it is necessary to add a quantity equal to or greater than $2P$ for the total to be only $2P$. This consequence is visibly absurd, therefore the hypothesis from which we began cannot be valid, i.e. it is impossible that the sum of the angles of triangle ABC can be smaller than two right angles.

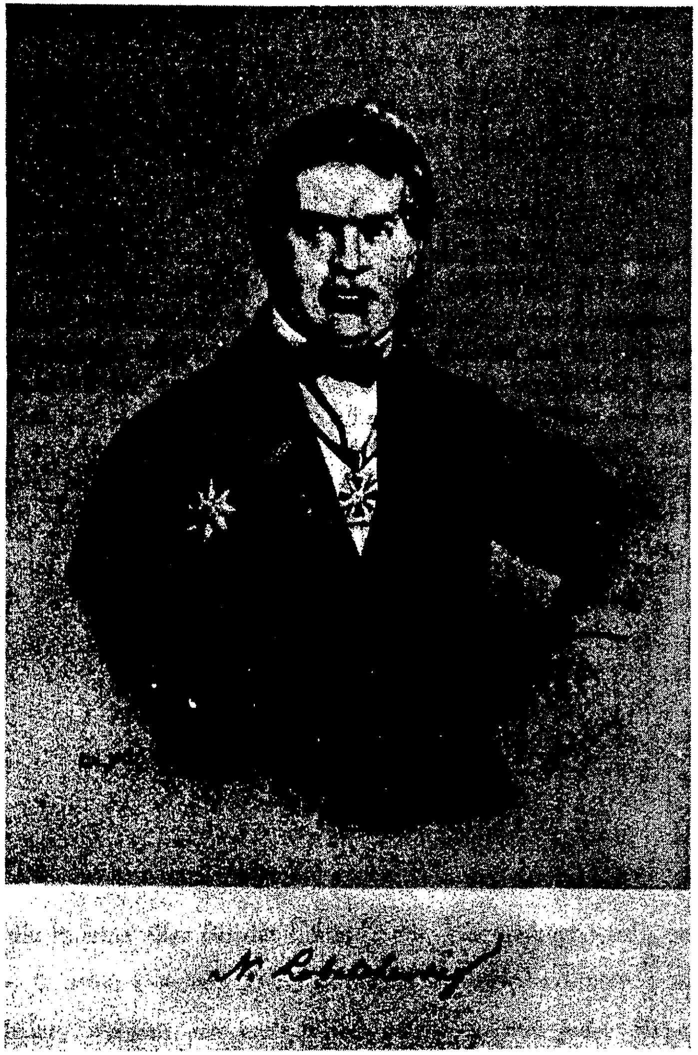
(b) [The parallel] postulate has never hitherto been demonstrated in a way strictly geometrical, and independent of all considerations about infinity, a circumstance attributable, doubtless, to the importance of our common definition of a straight line, on which the whole of geometry hinges. But viewing the matter in a more abstract light, we are furnished by analysis with a very simple method of rigorously proving both this and the other fundamental properties of Geometry. We here propose to expound this method, with all the requisite minuteness, beginning with the theorem concerning the sum of the three angles of a triangle.

By superposition, it can be shown immediately, and without any preliminary propositions, that *two triangles are equal when they have two angles and an interadjacent side in each equal*. Let us call this side p, the two adjacent angles A and B, the third angle C. This third angle C therefore is entirely determined, when the angles A and B, with the side p, are known; [...] hence the angle C must be a determinate function of the three quantities A, B, p, which I shall express thus, $C = \phi:(A, B, p)$.

Let the right angle be equal to unity, then the angles A, B, C will be numbers included between 0 and 2; and since $C = \phi:(A, B, p)$, I assert, that the line p cannot enter into the function ϕ. For we have already seen that C must be entirely determined by the given quantities A, B, p alone, without any other line or angle whatever. But the line p is heterogeneous with the other numbers A, B, C; and if there existed any equation between A, B, C, p the value of p must be found from it in terms of A, B, C; whence it would follow that p is equal to a number, which is absurd; hence p cannot enter into the function ϕ, and we have simply $C = \phi:(A, B)$. (Against this demonstration it has been objected that if it were applied word for word to spherical triangles, we should find that two angles being known, are sufficient to determine the third, which is not the case in that species of triangle. The answer is, that in spherical triangles, there exists one element more than in plane triangles, the radius of the sphere, namely, which must not be omitted from our reasoning. Let r be the radius; instead of $C = \phi(A, B, p)$ we shall now have $C = \phi(A, B, p, r)$ or by the law of homogeneity, simply $C = \phi(A, B, p/r)$. But since the ratio p/r is a number, as well as A, B, C, there is nothing to hinder p/r from entering the function ϕ, and consequently we have no right to infer from it, that $C = \phi(A, B)$.)

This formula already proves that if two angles of one triangle are equal to two angles of another, the third angle of the former must also be equal to the third angle of the latter, and this granted, it is easy to arrive at the theorem we have in view.

First, let ABC be a triangle right angled at A, from the point A draw AB perpendicular to the hypoteneuse. The angles B and D of the triangle ABD are equal to the angles B and A of the triangle BAC; whence, from what has just been proved, the third angle BAD is equal to the third C. For a like reason the angle $DAC = B$, hence $BAD + DAC$ or $BAC = B + C$; but the angle BAC is right; hence *the two acute angles of a right angled triangle are together equal to a right angle.*



Geometrische Untersuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

Nicolaus Lobatschewsky,
Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Universität Kasan.

Berlin, 1840.
In der G. Fincke'schen Buchhandlung.

4-8

E L E M E N T Æ R A F D E L I N G

NR. 20

JANUAR 1988

N. I. Lobatjevskij :

Geometriske Undersøgelser over Teorien
for Parallelle Linier.

Delvis oversættelse af

Nicolaus Lobatschewsky [1]*

Geometrische Untersuchungen zur
Theorie der Parallellinien.

Berlin 1840

(ved Lars Mejlbo).

*) Tal i skarp parentes henviser til oversætterens anmærkninger efter texten.

Jeg fandt nogle mangler i geometrien, som jeg anser for at være grunden til, at denne videnskab indtil nu ikke har kunnet gøre noget fremskridt fra den tilstand, som den er overladt os fra Euklid, når man undtager den analytiske geometri.

Til manglerne regner jeg [...] det vigtige hul i parallelteorien, som det trods alle matematikernes anstrengelser ikke er lykkedes at udfylde indtil nu. [...].

Jeg er af den anskuelse, at parallelteorien ikke bør savne geometernes opmærksomhed, og det er derfor min hensigt her at fremstille det væsentlige af mine undersøgelser. [...] [2].

For ikke at trætte min læser ved mængden af sætninger, hvis bevis ikke byder nogen vanskelighed, så angiver jeg på forhånd kun dem, som er nødvendige for det følgende.

1) En ret linie dækker sig selv i alle beliggenheder. Dermed mener jeg, at ved en drejning af fladen så forandrer den rette linie gennem to ubevægede punkter ikke sit sted.

2) To rette linier kan ikke skære hinanden i to punkter.

3) En ret linie, der forlænges tilstrækkeligt til begge sider, går ud over alle grænser [3], og deler således en begrænset plan i to dele [4].

4) To rette linier, som står vinkelret på én og samme tredie, skæres aldrig, uanset hvor langt de forlænges.

5) En ret linie skærer altid en anden ret linie, hvis den går fra den ene side af denne til den anden [5].

6) Topvinkler, ved hvilke den enes ben er forlængelserne af benene i den anden, er lige store. [...] [6].

7) To rette linier skæres ikke, hvis de skærer en tredie under lige store vinkler.

8-5

8) I en retlinet trekant ligger lige store sider overfor lige store vinkler, og omvendt.

9) I en retlinet trekant ligger den større side også overfor den større vinkel. I en retvinklet trekant er hypotenusen større end enhver katete, og de hosliggende vinkler er spidse.

10) Retlinede trekanter er kongruente, når de har en side og to vinkler lige store, eller når to sider og den mellemliggende vinkel er lige store, eller når to sider og den vinkel, der ligger overfor den største side er lige store, eller når de tre sider er lige store.

11) - 15) [...] [6].

Herfra følger de øvrige sætninger med deres forklaringer og beviser.

16) Alle rette linier, som i én plan løber ud fra et punkt, kan i forhold til en given linie i samme plan deles i to klasser nemlig i *skærende* og *ikke-skærende*. *Grænselinien* mellem den ene og den anden klasse af disse linier kaldes *parallel med den givne linie*. [7]

Lad der fra punktet A (fig. 1) være fældet den vinkelrette AD på linien BC, og lade AE være oprejst vinkelret.

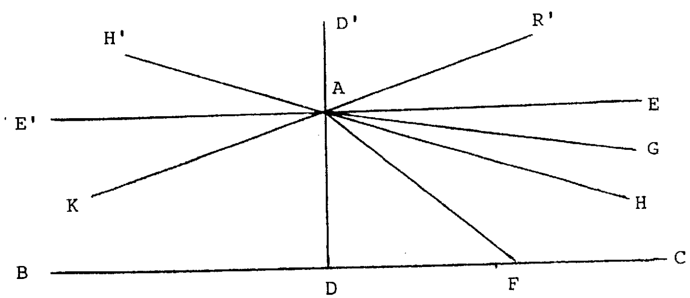


Fig. 1.

I den rette vinkel EAD vil enten alle de rette linier, der udgår fra A, skære linien DC, som f.ex. AF, eller der vil være nogle af dem, der - ligesom den vinkelrette AE - ikke skærer linien DC. I uvished om den vinkelrette AE er den eneste linie, som ikke skærer DC, vil vi antage, at det er muligt, at der findes andre linier f.ex. AG, som ikke skærer DC, hvor langt de end forlænges.

Ved overgangen fra de skærende linier AF til de ikke-skærende AG, må man støde på en linie AH, der er parallel med DC; en grænselinie, på hvis ene side alle linier AG ikke skærer DC, mens på den anden side alle rette linier AF skærer DC.

Vinklen HAD mellem parallellen HA og den vinkelrette AD kaldes *parallelvinklen*, og den vil vi her betegne med $\Pi(p)$ for $AD = p$.

Hvis $\Pi(p)$ er en ret vinkel, så vil forlængelsen AE' af den vinkelrette AE ligeledes være parallel med forlængelsen DB af linien DC. Vi bemærker desuden, at i forhold til de fire rette vinkler, som dannes omkring A af de vinkelrette AE og AD og deres forlængelser AE' og AD', vil enhver ret linie, der udgår fra A, enten selv eller i det mindste forlænget ligge i én af de to rette vinkler, som er vendt mod BC, således at de alle vil skære linien BC, når de forlænges tilstrækkeligt meget til hver side - bortset fra parallellen EE'.

Når $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, så vil der på den anden side af AD med samme vinkel $DAK = \Pi(p)$ ligge endnu en linie AK, som er parallel med forlængelsen DB af DC, således at vi under denne antagelse desuden må skelne mellem siderne for parallellitet. Alle de øvrige linier eller deres forlængelser indenfor de to rette vinkler vendt mod BC, tilhører de skærende, hvis de ligger indenfor vinklen $HAK = 2\,\Pi(p)$ mellem parallellerne; derimod hører de til de ikke-skærende AG, når de ligger på den anden side af parallellerne AH og AK i de to vinkelrum EAH = $\frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, E'AK = $\frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ mellem parallellerne og den på AD vinkelrette EE' . På den anden side af den vinkelrette EE' vil forlængelserne AH' og AK' af parallellerne AH og AK på lignende måde være parallelle med BC ; alle de øvrige linier hører i vinkelrummet K'AH' til de skærende og i vinkelrummene K'AE og H'AE' til de ikke - skærende.

Under forudsætning af, at $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$, kan linierne altså kun være skærende eller parallelle; antager vi derimod, at $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, så må man tillade to paralleller, én på den ene og én på den anden side. Desuden må man dele de øvrige linier i ikke - skærende og skærende. Under begge forudsætninger tjener det som karakteristik for parallellitet, at linien bliver til en skærende ved den mindste afvigelse mod den side, hvor parallellen ligger. Når AH er parallel med DC , så vil enhver linie AF skære DC uanset, hvor lille vinklen HAF er.

17) En ret linie er parallel i alle sine punkter.

Lad AB (fig. 2) være parallel med CD , på hvilken AC er vinkelret. Vi vil betragte to punkter, som er taget vilkårligt på linien AB og på dens forlængelse på den anden side af den vinkelrette.

Lad punktet E ligge på den side af den vinkelrette, hvor AB er parallel med CD . Den vinkelrette EK fældes fra punktet E på CD , og derpå trækkes EF , således at den falder indenfor vinkelrummet BEK . Man forbinder nu punkterne A og F med en ret linie, hvis forlængelse må skære CD et sted i G (sætn. 16). Herved får man en trekant ACG , som linien EF går ind i. Ifølge konstruktionen kan EF ikke skære AC og heller ikke AG og EK for anden gang (sætn. 2), så den må træffe CD et sted i H (sætn. 3).

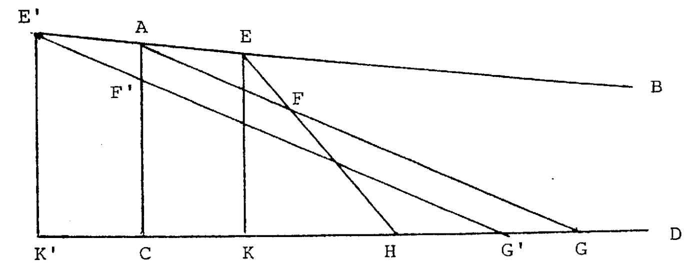


Fig. 2.

Lad nu E' være et punkt på forlængelsen af AB og E'K' vinkelret på forlængelsen af linien CD . Man trækker linien E'F' under så lille en vinkel AE'F' , at den skærer AC et sted i F' ; fra A trækker man linien AF under samme vinkel, dens forlængelse skærer CD i G (sætn. 16). Dermed får man en trekant AGC , hvori forlængelsen af E'F' går ind. Da denne linie ikke skærer AC for anden gang og heller ikke kan skære AG , fordi vinkel BAG = BE'G' (sætn. 7), så må den træffe CD et sted i G' .

Ligegyldigt fra hvilket punkt E eller E' der udgår linier EF og E'F' , og hvor lidt de end afviger fra linien AB , så vil de dog altid skære CD , som AB er parallel til.

18) To linier er altid gensidigt parallelle.

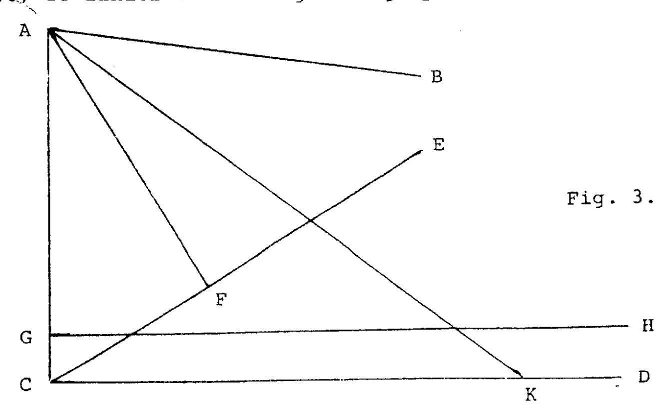


Fig. 3.

Lad AC være vinkelret på CD (fig. 3), som AB er parallel til. Fra C trækker man linien CE under en spids vinkel ECD med CD, og man fælder den vinkelrette AF fra A på CE. På den måde får man en retvinklet trekant ACF, hvori hypotenusen AC er større end kateten AF (sætn. 9). Afsætter man AG = AF og lægger AF på AG, så vil AB og FE få stillingerne AK og GH, således at vinkel BAK = FAC, og følgelig skærer AK linien DC et sted i K (sætn. 16). Derved opstår trekant AKC, hvori den vinkelrette GH skærer linien AK i L (sætn. 3), og det bestemmer afstanden AL fra A til fællespunktet mellem linierne AB og CE på linien AB.

Heraf følger, at CE altid skærer AB uanset, hvor lille vinklen ECD end er, og derfor er CD parallel med AB.

19) I en retlinet trekant kan summen af vinklerne ikke være større end to rette.

Antag, at summen af vinklerne i trekant ABC er $\pi + \alpha$ (fig. 4).

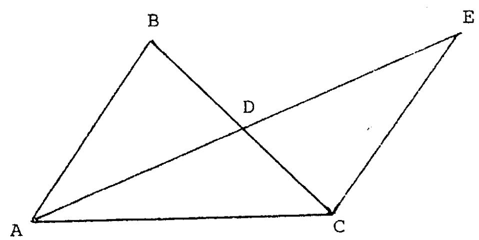


Fig. 4.

Hvis siderne ikke er lige lange, så vælger man den korteste BC, halverer den i D, trækker linien AD og forlænger den til DE = AD; derpå forbinder man punktet E med C ved den rette linie EC. I de kongruente trekanter ABD og CDE er vinkel ABD = DCE og BAD = DEC (sætn. 6 og 10), og heraf følger, at vinkelsummen i trekant ACE også må være $\pi + \alpha$. Desuden er den mindste vinkel i trekant ABC

gået over i den nye trekant ACE, hvorved den er delt i to dele EAC og AEC. Fortsætter man således, idet man stadig halverer den side, som ligger overfor den mindste vinkel, så må man endelig komme til en trekant, i hvilken vinkelsummen er $\pi + \alpha$, men hvori der befinder sig to vinkler, som hver i absolut størrelse er mindre end $\frac{1}{2}\alpha$. Da nu den tredie vinkel ikke kan være større end π, så må α være nul eller negativ [8].

20) Hvis vinkelsummen i én retlinet trekant er lig med to rette, så er det også tilfældet i enhver anden trekant.

Hvis vinkelsummen er $= \pi$ i den retlinede trekant ABC (fig. 5), så har den mindst to spidse vinkler - A og C. Fra spidsen af den tredie vinkel B fælder man den vinkelrette p på den overfor

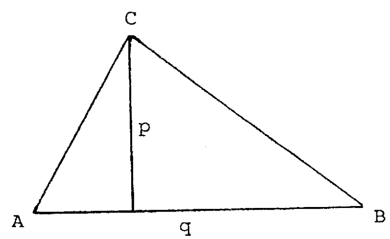


Fig. 5.

liggende side AC, og den deler da trekant ABC i to retvinklede, i hvilke vinkelsummen ligeledes er π, for den kan ikke være større end π i den ene af dem, og i den sammensatte er den ikke mindre end π [9].

Således får man en retvinklet trekant, hvis kateter er p og q, og heraf en firkant, hvis overfor liggende sider er lige så store og vinkelrette på p og q (fig. 6). Ved gentagelse af denne firkant kan man få en lignende med sider np og q, og endelig dannes en firkant ABCD med sider, der står vinkelret på hinanden, således at AB = np, AD = mq, DC = np, BC = mq, m og n er vilkårlige hele tal.

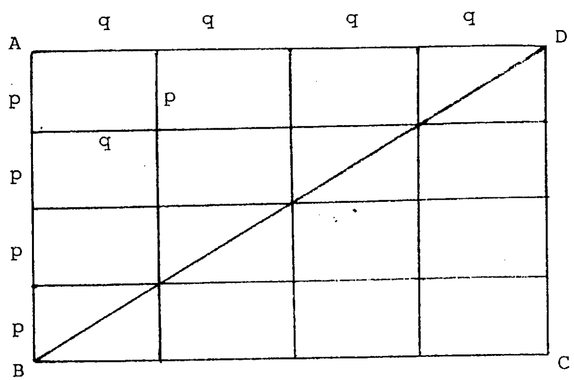


Fig. 6.

En sådan firkant deles af diagonalen BD i to kongruente, retvinklede trekanter BAD og BCD, som hver har vinkelsummen $= \pi$. Tallene m og n kan vælges så store, at den retvinklede trekant ABC (fig. 7), hvis kateter er AB = np, BC = mq indeholder en given trekant BDE blot de rette vinkler falder sammen. Trækker man derpå linien DC, så får man retvinklede trekanter, af hvilke to på hinanden følgende har en side fælles. Trekanten ABC opstår ved foreningen af

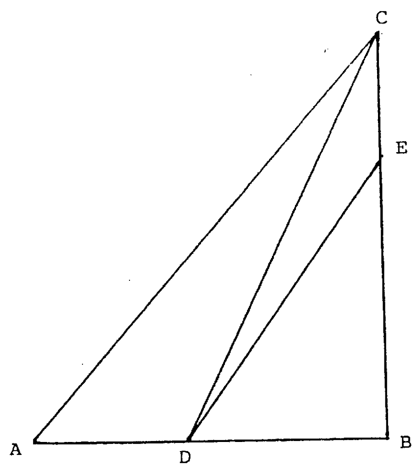


Fig. 7.

trekanterne ACD og DCB, som ikke kan have vinkelsum større end π, og den må derfor være lig med π, da vinkelsummen i den sammensatte trekant er lig med π. På lignende måde består trekant BDC af de to trekanter DEC og DBE, og følgelig er vinkelsummen $= \pi$ i DBE. Det må så være tilfældet i enhver trekant, fordi en sådan kan deles i to retvinklede trekanter.

Heraf følger, at der kun er to mulige antagelser: Enten er vinkelsummen lig med π i alle retlinede trekanter, eller den er mindre end π i dem alle.

21) Fra et givet punkt kan man altid trække en ret linie, således, at den danner en vilkårligt lille vinkel med en given ret.

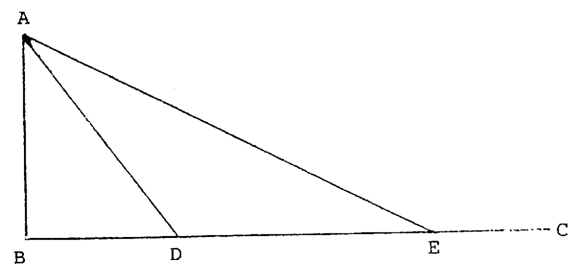


Fig. 8.

Man fælder den vinkelrette AB fra det givne punkt A på den givne linie BC, tager vilkårligt punktet D på BC, trækker linien AD, sætter DE = AD og trækker AE (fig. 8). Hvis vinklen ADB $= \alpha$ i den retvinklede trekant ABD, så er vinklen AED enten $\frac{1}{2}\alpha$ eller mindre i den ligebenede trekant ADE (sætn. 8 og 20). Ved at fortsætte således når man endelig en sådan vinkel AEB, som er mindre end enhver given.

22) Hvis to vinkelrette på én og samme rette linie er parallelle med hinanden, så er vinkelsummen $= \pi$ i enhver retlinet trekant.

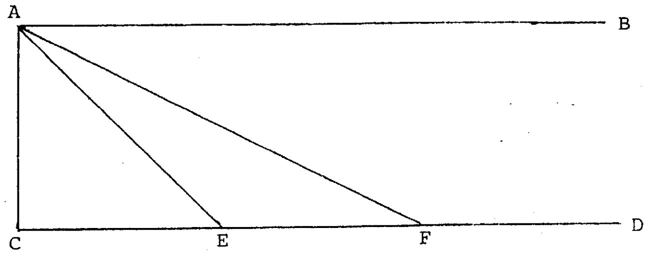


Fig. 9.

Lad linierne AB og CD være parallelle med hinanden og vinkelrette på AC (fig. 9). Fra A trækker man linierne AE og AF mod punkterne E og F, som ligger på linien CD vilkårligt langt væk fra C, og så FC > EC. Antag at vinkelsummen i den retvinklede trekant ACE er $\pi - \alpha$, og i trekant AEF er $\pi - \beta$, så bliver den i trekant ACF lig med $\pi - \alpha - \beta$, hvor α og β ikke kan være negative. Hvis vinklerne BAF = a, AFC = b, så er $\alpha + \beta = a - b$, og hvis linien AF nu fjernes fra den vinkelrette AC, så kan man gøre vinklen a mellem AF og parallellen AB så lille, som man vil, ligeledes kan man formindske vinklen b, og følgelig kan α og β ikke have anden størrelse end $\alpha = 0$ og $\beta = 0$.

Det fås heraf, at det for alle retlinede trekanter er vinkelsummen enten π, og samtidig er parallelvinklen $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ for enhver linie p, eller vinkelsummen er $< \pi$, og samtidig er $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Den første forudsætning tjener som grundlag for *den sædvanlige geometri* og *den plane trigonometri*.

Den anden forudsætning kan også tillades, uden at den fører til nogen selvmodsigelse, og derved begrunder den en ny geometrisk lære, som jeg har givet navnet: *Imaginær geometri*, og som jeg agter at fremstille her, [...].

23) For enhver given vinkel α kan man finde en linie p, således at $\Pi(p) = \alpha$.

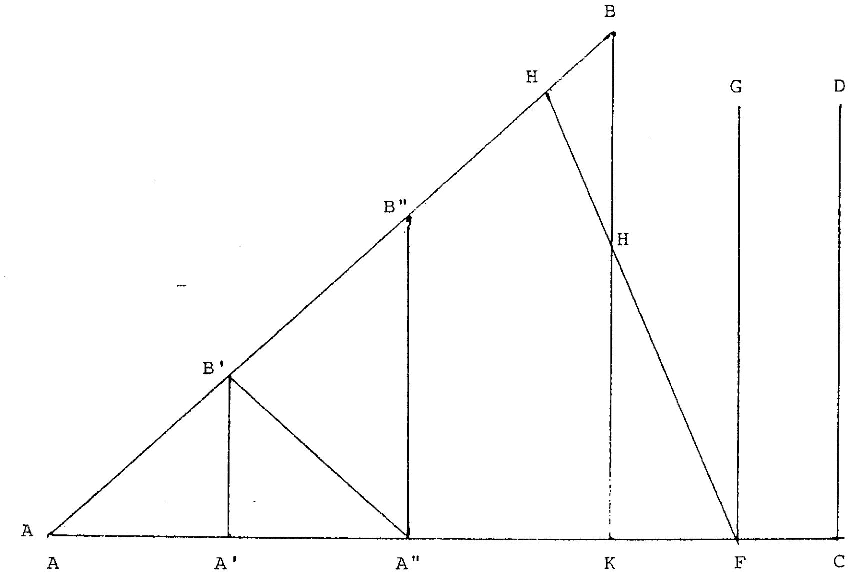


Fig. 10.

Lad AB og AC (fig. 10) være to rette linier, som i snitpunktet A danner den spidse vinkel α. På AB tager man B' vilkårligt og fælder den vinkelrette B'A' på AC, man sætter A'A" = AA', oprejser den vinkelrette A"B" i A" og fortsætter således, til man når en vinkelret CD, som ikke skærer AB. Det må nødvendigvis finde sted, for hvis vinkelsummen er $\pi - a$ i trekant AA'B', så er den $\pi - 2a$ i trekanten AB'A", i trekant AA"B" er den derfor mindre end $\pi - 2a$ (sætn. 20) o.s.v. indtil den endelig bliver negativ og dermed viser umuligheden af at danne en trekant.

Den vinkelrette CD kan være den, for hvilken det for alle punkter nærmere ved A gælder, at de øvrige skærer AB; i det mindste må en sådan vinkelret FG findes ved overgangen fra de skærende til de ikke skærende. Nu trækker man linien FH, som danner en spids vinkel HFG med FG mod den side, hvor punktet A ligger. Fra et vilkårligt punkt H på FH fældes den vinkelrette HK på AC, dens forlængelse må følgelig skære AB et sted i B, og derfor danne en trekant AKB, som forlængelsen af FH går ind i; den må derfor skære hypotenusen AB et sted i M. Da vinkel GFH er vilkårlig og kan antages at være så lille, man vil, så er FG parallel med AB og AF = p (sætn. 16 og 18).

Man ser let, at α voxer, når p mindskes, idet den nærmer sig $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, når p = 0; når p voxer, mindskes α, idet den nærmer sig nul for $p = \infty$. Da det er vilkårligt, hvilken vinkel man vil forstå ved $\Pi(p)$, når p udtrykkes ved et negativt tal, så vil vi antage, at

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi ,$$

en ligning, som skal gælde for alle værdier af p, positive såvel som negative, samt p = 0.

24) Jo mere man forlænger parallelle linier til deres parallelside, desto mere nærmer de sig hinanden.

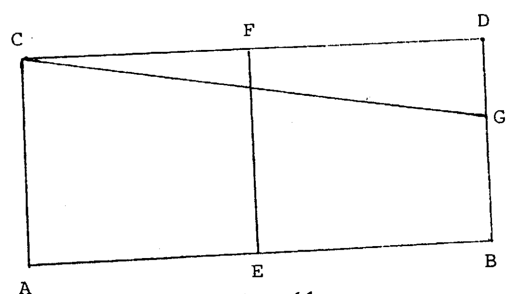


Fig. 11.

Hvis der på linien AB (fig. 11) er oprejst to vinkelrette AC = BD, og deres endepunkter C og D er forbundet med en ret linie, så vil firkanten CABD have to rette ved A og B, men ved C og D to spidse vinkler (sætn. 22), som er lige store, hvad man let overbeviser sig om, idet man tænker sig firkanten lagt

på sig selv, således at linien BD falder på AC og AC på BD. Man halverer AB og oprejser den vinkelrette EF på AB i halveringspunktet E, den må ligeledes stå vinkelret på CD, da firkanterne CAEF og FEBD dækker hinanden, når man lægger dem således på hinanden, at linien FE forbliver i samme stilling. Derfor kan linien CD ikke være parallel med AB, derimod må parallellen til den sidstnævnte gennem punktet C, nemlig CG, afvige mod AB (sætn. 16) og afskære en del BG < CA på den vinkelrette BD. Da punktet C er vilkårligt valgt på linien CG, så følger det, at CG nærmer sig mere til AB, jo mere den forlænges.

25) To rette linier, som er parallelle med en tredie, er også parallelle med hinanden.

Vi antager først, at de tre linier AB, CD og EF (fig. 12) ligger i samme plan.

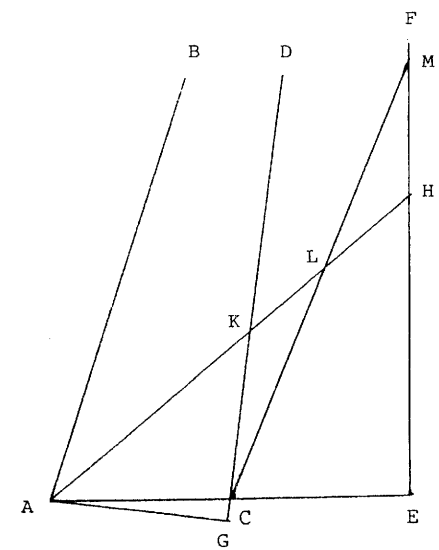


Fig. 12.

Når to af dem, i orden AB og CD , er parallelle med den yderste EF , så er også AB og CD parallelle med hinanden. For at vise det fælder man fra et punkt A på den yderste linie AB den vinkelrette AE på den anden yderste FE , og den skærer den midterste linie CD i et punkt C (sætn. 3) under en vinkel DCE < $\frac{1}{2}\pi$ på den side af CD ,hvor parallellen EF ligger (sætn. 22). En vinkelret AG fældet fra det samme punkt A på CD , må falde i vinkelrummet for den spidse vinkel ACG (sætn. 9). Enhver anden linie AH , der trækkes fra A i vinklen BAC , må skære den til AB parallelle EF et sted H , uanset hvor lille vinklen BAH er, og følgelig vil CD skære AH et sted K indenfor trekanten AEH , fordi den ikke møder EF . Når AH udgår fra punktet A i vinklen CAG , så må den skære den forlængede af CD mellem punkterne C og G i trekanten CAG . Heraf følger, at AB og CD er parallelle (sætn. 16 og 18).

Hvis begge de to ydre linier AB og EF antages at være parallelle med den midterste CD , så vil enhver linie AK trukket fra A i vinkelrummet BAE skære linien CD et sted i K , uanset hvor lille vinkel BAK er. På forlængelsen af AK tager man et punkt L vilkårligt og forbinder det med C ved linien CL ,som må skære EF et sted M ,hvorved der dannes en trekant MCE . Forlængelsen af linien AL i trekanten MCE kan hverken skære AC eller CM for anden gang, følgelig må den træffe EF et sted H , og derfor er AB og EF gensidigt parallelle.

[...]

26) - 28) [...] [6]

29) I en retlinet trekant vil de vinkelrette, der oprejses på midten af siderne, enten ikke skære hinanden, eller de skærer alle tre hinanden i samme punkt. [10].

Lad det være forudsat, at i trekant ABC (fig. 21) skæres de

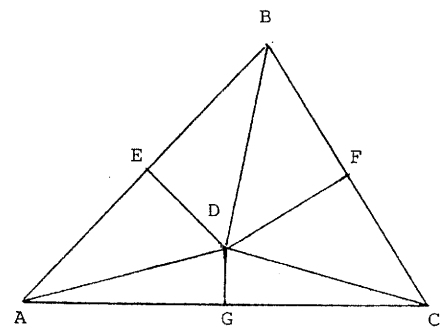


Fig. 21.

to vinkelrette ED og DF ,som er oprejst i midtpunkterne E og F , i punktet D . Man trækker så linierne DA ,DB ,DC til trekantens vinkler.

I de kongruente trekanter ADE og BDE (sætn. 10) er AD = BD, og på samme måde er BD = CD; altså er trekant ADC ligebenet, og følgelig falder den vinkelrette fra spidsen D på grundlinien AC i den sidstes midtpunkt G .

Beviset er uændret også i de tilfælde, hvor skæringspunktet D mellem de vinkelrette ED og FD falder på linien AC selv eller udenfor trekanten.

Hvis man altså antager, at to af de vinkelrette ikke skærer hinanden, så kan den tredie heller ikke træffe sammen med dem.

30) De vinkelrette, som oprejses på midten af siderne i en retlinet trekant, er alle tre parallelle med hinanden, hvis to af dem forudsættes at være parallelle. [10].

I trekant ABC (fig. 22) er linierne DE ,FG ,HG oprejst vinkelret på siderne i deres midtpunkter D ,F ,H .

Vi vil først antage, at de to vinkelrette DF og FG er parallelle, at de skærer linien AB i L og M ,samt at den vinkelrette HK befinder sig mellem dem. Fra punktet L og i vinkelrummet BLE

8-12

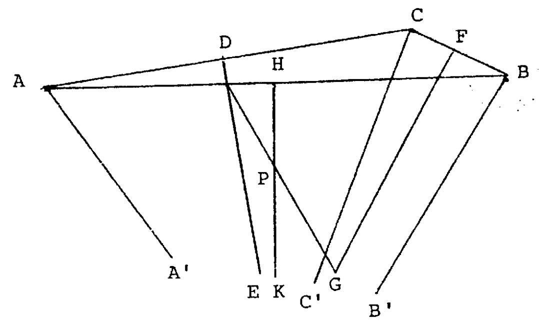


Fig. 22.

trækker man vilkårligt linien LG , som skærer FG et sted i G , uanset hvor lille den afvigende vinkel GLE er (sætn. 16). Da den vinkelrette HK ikke kan møde MG (sætn. 29), så må den - i trekant LGM - skære LG et sted i P , og deraf følger, at HK er parallel med DE (sætn. 16) og med MG (sætn. 18 og 25).

Sætter man siden BC = 2a , AC = 2b , AB = 2c , og betegnes de overfor liggende vinkler med A , B , C , så gælder i det lige betragtede tilfælde, at

$$A = \Pi(b) - \Pi(c)$$

$$B = \Pi(a) - \Pi(c)$$

$$C = \Pi(a) + \Pi(b) ,$$

som man let overbeviser sig om ved hjælp af linierne AA' , BB' , CC' , som er trukket fra punkterne A , B , C parallelle med HK og derfor med de to andre vinkelrette DE og FG (sætn. 23 og 25).

Hvis de to vinkelrette HK og FG er parallelle, så kan den tredie DE ikke skære dem (sætn. 29), og derfor er den enten parallel med dem, eller den skærer AA' . Den sidste antagelse betyder, at vinkel $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Formindsker man denne vinkel, således at den bliver lig med $\Pi(a) + \Pi(b)$, idet man giver linien AC den nye stilling CQ (fig. 23), og betegner størrelsen af den tredie side BQ med 2c' , så må vinkel CBQ med toppunktet i B være blevet forstørret og lig med $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, efter det oven-

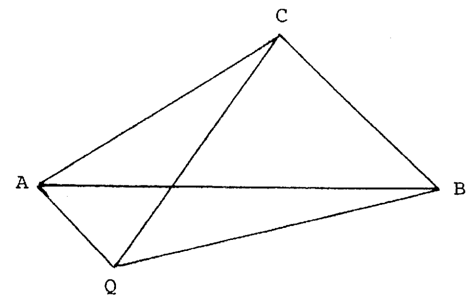


Fig. 23.

for viste, hvoraf følger, at $c' > c$ (sætn. 23). Men i trekant ACQ er vinklerne ved A og Q lige store, og derfor må vinklen ved Q i trekant ABQ være større end den ved punktet A , så at AB > BQ (sætn. 9), eller $c > c'$.

31) *Grænselinie* (*oricycle*) kaldes den i én plan liggende krumme linie, for hvilken alle vinkelrette, oprejst i midtpunkterne af korderne, er parallelle med hinanden. [11].

I overensstemmelse med denne definition kan man forestille sig, at grænselinien fremkommer, når man til en given linie AB (fig. 24) udfra et givet punkt A trækker korder AC = 2a under forskellige vinkler $CAB = \Pi(a)$; endepunktet C af en sådan korde ligger på grænselinien, hvis punkter man således kan bestemme i almindelighed. Den vinkelrette DE , oprejst på midten D af korden AC , er parallel med linien AB , som kaldes *grænseliniens axe*. På samme måde er også enhver vinkelret FG oprejst i midtpunktet af en vilkårlig korde AH parallel med AB , og det følger heraf, at denne egenskab overhovedet tilhører enhver vinkelret KL , som oprejses i midtpunktet K af en vilkårlig korde CH , som er trukket mellem to punkter C og H på grænselinien (sætn. 30). Sådanne vinkelrette må ligeledes og uden fremhævelse af AB kaldes *axer for grænselinien*.

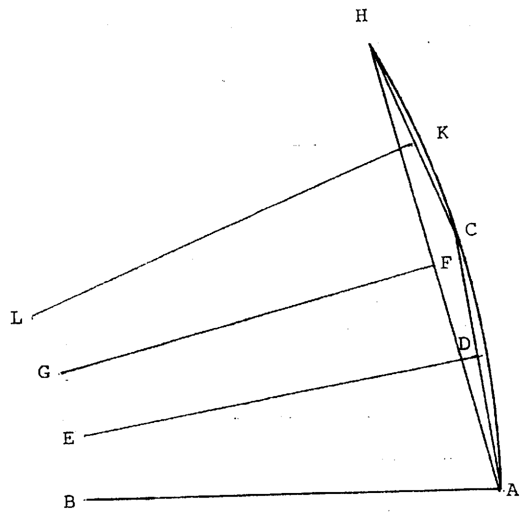


Fig. 24.

32) En cirkel, hvis diameter voxer, går over i en grænselinie.

Lad AB (fig. 25) være en korde for grænselinien. Fra endepunkterne A og B af korden trækker man to axer AC og BD, som følgelig danner to ens vinkler med korden BAC = ABD = α (sætn. 31). På den ene af disse axer AC vælger man vilkårligt et punkt E som centrum for en cirkel og trækker cirkelbuen AF fra begyn-

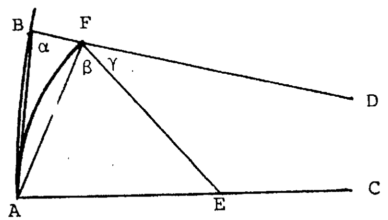


Fig. 25.

delsespunktet på axen AC til dens snitpunkt F med den anden axe BD. Den radius FE, der hører til punktet F, danner på den ene side vinklen AFE = β med korden AF og på den anden side vinklen EFD = γ med axen BD. Heraf får man, at vinklen BAF mellem de to korder er $\alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (sætn. 22), hvoraf følger, at $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Og da vinklen γ formindskes til nul, både som følge af, at centrum E bevæger sig i retningen AC, hvis F var uforandret (sætn. 21), og som følge af, at F nærmer sig B på axen BF, hvis centrum E blev på plads (sætn. 22), så følger det, at med en sådan formindskelse af vinklen γ og dermed af vinklen $\alpha - \beta$, d.v.s. den gensidige hældning af de to korder AB og AF, vil afstanden mellem punktet B på grænselinien og punktet F på cirklen også forsvinde.

Derfor kan man også kalde grænselinien for en *cirkel med uendelig stor radius.*

33) Lad AA' = BB' = x (fig. 26) være to linier, der er parallelle til siden AA', og som tjener som axer for de to grænsebuer (dvs. buer på to grænselinier) AB = s, A'B' = s'; så er

$$s' = se^{-x},$$

hvor e er uafhængig af buerne s, s', og af linien x, afstanden mellem buerne s og s'.

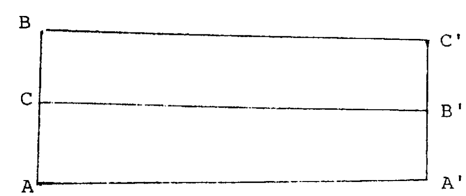


Fig. 26.

For at bevise det, antager man, at buen s har et forhold til s', som er lig med forholdet mellem to hele tal n og m. Mellem de to buer AA' og BB' trækker man en tredie axe CC', som afskærer en del $AC = t$ af buen AB og en del $A'C' = t'$ af buen $A'B'$. Lad forholdet t til s være lig forholdet p til q mellem to hele tal, således at

$$s = \frac{n}{m}s \;,\quad t = \frac{p}{q}s .$$

Deler man nu s i nq lige store dele, så bliver der mq sådanne dele på s' og np på t. Desuden svarer disse lige store dele på s' og t', således at

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s} .$$

Hvordan man end tager de to buer t og t' mellem axerne AA' og BB', så forbliver forholdet mellem de to buer t og t' det samme, så længe afstanden x mellem dem er uforandret. [12]. Sætter man $s = es'$ for $x = 1$, så må der for hvert x gælde:

$$s' = se^{-x} .$$

Da e er et ubekendt tal, som kun er underkastet betingelsen $e > 1$, og da længdeenheden for x kan vælges vilkårligt, så kan man for at forenkle regningerne vælge denne, således at e bliver grundtallet for de Neper'ske logaritmer. [12].

Man kan desuden bemærke, at $s' = 0$ for $x = \infty$, og derfor ikke blot formindskes afstanden mellem to paralleller (sætn. 24), men den forsvinder, når parallellerne forlænges ubegrænset til parallellitetssiden. Parallellinier har altså karakter af at være asymptoter.

34) - 37) [...] [13].

Oversætterens anmærkninger.

[1] Som bekendt bruger russerne et andet alfabet end vi, og det giver visse kvaler ved transkription af russiske navne til det latinske alfabet. For Lobatjevskijs navn bruger jeg samme transkription som Kristensen.

[2] Det af indledningen, som er sprunget over i oversættelsen, handler om forskellige historiske materier, som ville kræve for megen forklaring at gøre forståelige, og som ikke har nogen betydning for det følgende.

[3] Rette linier kan altså forlænges i det uendelige, det udelukker den elliptiske geometri. Kravet underforstås hos Euklid.

[4] Der er tale om en ordensegenskab. Sådanne egenskaber underforstås helt hos Euklid. Iøvrigt bruger Lobatjevskij flere egenskaber end den nævnte.

[5] Lobatjevskij bruger faktisk væsentligt skrappere "kontinuitetsegenskaber", men Euklid bemærker dem slet ikke.

[6] Den text, som er oversprunget i oversættelsen, handler om sfæriske trekanter og rumgeometri. De bruges ikke i oversættelsen.

[7] Definitionen af parallellitet strider mod Euklid def. I.23, der blot kræver, at linierne er ikke-skærende. Kristensen bruger betegnelsen B-parallelle (B = Bolyai) for Lobatjevskijs begreb, og han kalder alt i alt de ikke-skærende linier for E-parallelle. Det, som Lobatjevskij kalder ikke-parallelle, ikke-skærende linier, er hos Kristensen de ultraparallelle, men det kræver en sætning: To E - men ikke B - parallelle linier har en fællesnormal. Terminologien er ikke fast.

8-15

[8] Euklid sætn. I.17 fortæller, at summen af <u>to</u> vinkler i en trekant er mindre end π. Beviset bruger ikke parallelaxiomet. Det er måske mest overbevisende at bruge denne sætning, idet det - for mig - ikke er helt klart, at man ved systematisk at "halvere" den mindste vinkel også får "halveret" den næstmindste.

[9] Her bruges, at *defekten* af en trekant, d.v.s.

$$\delta(T) = \pi - \text{vinkelsummen},$$

er additiv i den svage betydning, som f.ex. er vist i sætn. 1.1 s. 24 hos Kristensen.

[10] Se Kristensen s. 82 -83. Sætningen om, at *enhver* trekant har en omskreven cirkel er ækvivalent med parallelaxiomet, se Kristensen s. 34 -35.

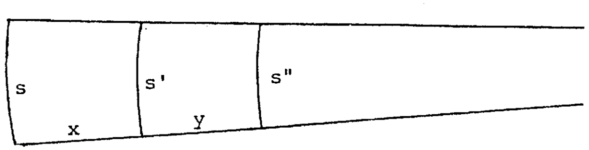
[11] Grænselinien eller oricyclen kaldes ofte horocyclen, se Kristensen s. 148 ff, hvor den er defineret lidt anderledes.

[12] Af detviste følger, at $s' = se(x)$. Men har vi tre grænsebuer s'', s', s, så er

$$s'' = s'e(y) = se(x)e(y) = se(x+y),$$

hvoraf det følger, at $e(x)$ opfylder funktionalligningen for exponentialfunktionen. Da $e(x)$ er aftagende, er

$$e(x) = e^{-x}.$$



De naturlige logaritmer kaldes ofte Neper'ske efter Napier. Det er imidlertid fejlagtigt, da Napiers logaritmer ikke er de naturlige - selvom de ligner.

[13] I de sidste sætninger gives en rumgeometrisk begrundelse for den ikke -euklidske trigonometri. Kristensen giver i kapitel VI en plangeometrisk begrundelse.

<u>Litteraturhenvisning:</u>

Kristensen, Erik, Ikke -euklidsk geometri,
G.E.C.Gads Forlag, København 1975.

8-16

En kort biografi.

N. I. Lobatjevskij blev født i Nizhni Novgorod i 1792, som søn af en funktionær i zarens tjeneste, der døde mens Nikolaj var barn. I 1800 flyttede moren med børnene til Kazan, hvor Lobatjevskij kom i gymnasiet og senere på universitetet.

I 1812 blev han magister i matematik og fysik, og 10 år senere blev han ordinær professor ved Kazans Universitet, hvor han blev resten af sit liv (til 1856). I 1827 blev han rektor for universitetet, og det var han til 1846. De sidste år var han blind.

Lobatjevskij begyndte at publicere sine arbejder over ikke euklidisk geometri i 1828, men det foregik under næsten total uopmærksomhed - selv i Rusland.

I modsætning til Bolyai - den anden opfinder af ikke-euklidsk geometri - forsøgte Lobatjevskij gennem hele sit liv at gøre "reklame" for "sin" geometri, og det foreliggende værk er netop et led i hans forsøg på at gøre den ikke-euklidske geometri kendt. Det er den første publikation på et vesteuropæisk sprog (Lobatjevskij havde tidligere publiceret på russisk og Bolyai på latin). Det var imidlertid forgæves. Først efter at Riemanns fundamentale afhandling om geometriens grundlag var publiceret i 1867 (den stammer fra 1854), blev der interesse for Lobatjevskijs arbejde.

L. M.

Bolyai, Janos (1802 - 1860)

Lobatjevskij, Nikolaj Ivanovich (1792 - 1856)

Riemann, Bernhard (1826 - 1866).

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

EUCLID
FREED OF ALL BLEMISH
OR
A GEOMETRIC ENDEAVOR IN WHICH ARE ESTABLISHED THE FOUNDATION PRINCIPLES OF UNIVERSAL GEOMETRY

BY
GIROLAMO SACCHERI
OF THE SOCIETY OF JESUS
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF PAVIA.

A WORK DEDICATED TO THE NOBLE SENATE OF MILAN BY THE AUTHOR

MILAN, 1733

PAOLO ANTONIO MONTANO SUPERIORUM PERMISSU

8-18

EUCLID FREED OF ALL BLEMISH

BOOK I.

IN WHICH IS PROVED: ANY TWO COPLANAR STRAIGHT LINES, FALLING UPON WHICH ANY STRAIGHT MAKES TOWARD THE SAME PARTS TWO INTERNAL ANGLES LESS THAN TWO RIGHT ANGLES, AT LENGTH MEET EACH OTHER TOWARD THOSE PARTS, IF INFINITELY PRODUCED.

PART I.

PROPOSITION I.

If two equal straights [sects] (*fig.* 1) *AC, BD, make with the straight AB angles equal toward the same parts: I say that the angles at the join CD will be mutually equal.*

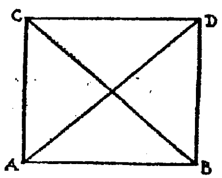


Fig. 1.

Proof. Join AD, CB. Then consider the triangles CAB, DBA. It follows (Eu. I. 4) that the bases CB, AD will be equal.

Then consider the triangles ACD, BDC. It follows (Eu. I. 8) that the angles ACD, BDC will be equal.

Quod erat demonstrandum.

PROPOSITION II.

Retaining the uniform quadrilateral ABCD, bisect the sides AB, CD (*fig.* 2) *in the points M and H.* [2] *I say the angles at the join MH will then be right.*

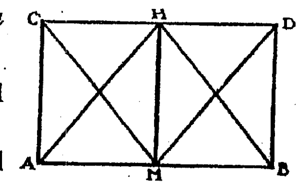


Fig. 2.

Proof. Join AH, BH, and likewise CM, DM.

Because in this quadrilateral the angles A and B are taken equal and likewise (from the preceding proposition) the angles C, and D are equal; it follows (Eu. 1. 4) (noting the equality of the sides) that in the triangles CAM, DBM, the bases CM, DM will be equal; and likewise, in the triangles ACH, BDH, the bases AH, BH.

Therefore; comparing the triangles CHM, DHM, and in turn the triangles AMH, BMH; it follows (Eu. I. 8) that we have mutually equal, and therefore right, the angles at the points M, and H.

Quod erat demonstrandum.

PROPOSITION III. ✲

If two equal straights [sects] (*fig.* 3) *AC, BD, stand perpendicular to any straight AB: I say the join CD will be equal to, or less, or greater than AB, according as the angles at CD are right, or obtuse, or acute.*

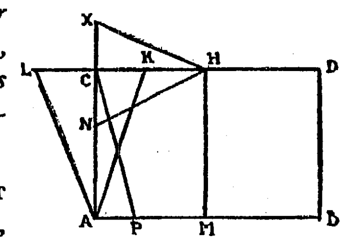


Fig. 3.

Proof of the First Part. Each angle C, and D, being right; suppose, if it were possible, either one of those, as DC, greater than the other BA.

Take in DC the piece DK equal to BA, and join AK. Since therefore on BD stand perpendicular the equal straights BA, DK, the angles BAK, DKA will be equal (P. I.). But this is absurd; since the angle BAK is by construction less than the assumed right angle BAC; and the angle DKA is by construction external, and therefore (Eu. I. 16) greater than the internal and opposite DCA, which is supposed right. Therefore neither of the aforesaid straights, DC, BA, is greater than the other, whilst the angles at the join CD are right; and therefore they are mutually equal.

Quod erat primo loco demonstrandum. [3]

PROOF OF THE SECOND PART. But if the angles at the join CD are obtuse, bisect AB, and CD, in the points M, and H, and join MH.

Since therefore on the straight MH stand perpendicular (P. II.) the two straights AM, CH, and at the join AC is a right angle at A, the straight CH will not be (P. I.) equal to this AM, since a right angle is lacking at C. ✲

But neither will it be greater: otherwise in HC the piece KH being assumed equal to this AM, the angles at the join AK will be (P. I.) equal.

But this is absurd, as above. For the angle MAK is less than a right; and the angle HKA is (Eu. I. 16) greater than an obtuse, such as the internal and opposite HCA is supposed.

It remains therefore, that CH, whilst the angles at the join CD are taken obtuse, is less than this AM; and therefore CD double the former is less than AB double the latter.

Quod erat secundo loco demonstrandum.

PROOF OF THE THIRD PART. Finally, however, if the angles at the join are acute, MH being constructed as before perpendicular (P. II.), we proceed thus. Since on the straight MH stand perpendicular two straights AM, CH, and at the join AC is a right angle at A, the straight CH will not be equal to this AM (as above), since the angle at C is not right.✲ But neither will it be less: otherwise, if in HC produced HL is taken equal to this AM, the angles at the join AL will be (as above) equal.

But this is absurd. For the angle MAL is by construction greater than the assumed right MAC; and the angle HLA is by construction internal, and opposite, and therefore less than (Eu. I. 16) the external HCA, which is assumed acute.

It remains therefore, that CH, whilst the angles at the join CD are acute, is greater than this AM, and therefore CD the double of the former is greater than AB the double of the latter.

Quod erat tertio loco demonstrandum.

Therefore it is established that the join CD will be equal to, or less, [4] or greater than this AB, according as the angles at the same CD are right, or obtuse, or acute.

Quae erant demonstranda.

9-1

Matematikkens historie

Opgaver i forbindelse med Cantor og den transfinite mængdelæres opståen.

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit. GEORG CANTOR

CANTOR, MORITZ (23. 8. 1829 – 10. 4. 1920)

Professor in Heidelberg. Führender Historiker der Mathematik.

Behandelte in seinen „Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik“ [C 1] die Entwicklung von den Anfängen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts.

Opgave 1.

Som omtalt i forelæsningen beviste Cantor at $]0,1] \times]0,1]$ har samme mægtighed som $]0,1]$ ved at definere en afbildning φ fra $]0,1] \times]0,1] \to]0,1]$ defineret ved at den afbilder et par af uendelige decimalbrøker

$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots$
$0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\ldots$

i den uendelige decimalbrøk

$0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\ldots$

Dedekind gjorde Cantor opmærksom på at φ ikke er surjektiv (på).

Cantor reparerede ovennævnte problem ved at benytte kædebrøker i stedet for decimalfremstillingen. Dette publicerede bevis er dog ret kompliceret. Senere viste Julius König at Cantors oprindelige ide kan reddes ved en simpel modifikation: Lad $(\alpha_1, \alpha_2) \in]0,1] \times]0,1]$. Dette punkt afbildes i et tal $\beta \in]0,1]$ hvis cifer $\beta_1, \beta_2, \ldots$ er bestemt på følgende måde. Først tages så mange cifer $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1k}$ fra α_1 så at det sidste ciffer α_{1k} er forskellig fra 0. Derefter tages så mange cifrer $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2\ell}$ fra α_2 så $\alpha_{2\ell}$ er forskellig fra 0. På denne måde fortsættes med cifferblokke skiftevis fra α_1 og α_2.

a) Find billedet af $(\alpha_1, \alpha_2) = (0{,}023004059\ldots, 0{,}890500099\ldots)$

b) Bevis at König's ide faktisk giver en bijektion.

Opgave 2

Nedenfor er aftrykt Cantor's første bevis for tælleligheden af de algebraiske tal og overtælleligheden af de reelle tal. (Cantor's "Gesammelte Abhandlungen" Springer Berlin 1932).

1) Gennemgå beviset for de algebraiske tals tællelighed.

2) Gennemgå beviset for de reelle tals overtællelighed.

3) Vis at der er lige så mange transcendente tal som der er reelle tal. Mere præcist vis at der er en bijektion fra mængden af reelle tal på mængden af transcendente tal.

Vink: vælg en følge $t_1, t_2, t_3 \ldots$ af transcendente tal og afbild de algebraiske tal på en delfølge heraf, og afbild $t_1, t_2, t_3, \ldots$ på den resterende delfølge.

III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 258—262 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$

wo n, a_0, $a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \qquad (2)$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in § 1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem § 1 den § 2 hinzu, in welchem ich zeige, daß, wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlgrößen von der Form (2) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ Zahlen η bestimmen kann, welche *nicht* in (2) enthalten sind; kombiniert man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von Liouville bewiesenen Satzes gegeben, daß es in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ unendlich viele *transzendente*, d. h. nicht algebraische reelle Zahlen gibt. Ferner stellt sich der Satz in § 2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgrößen, die ein sogenanntes Kontinuum bilden (etwa die sämtlichen reellen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind), sich nicht eindeutig auf den Inbegriff (ν) beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Kontinuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesamtheit aller reellen algebraischen Zahlen.

§ 1.

Gehen wir auf die Gleichung (1), welcher eine algebraische Zahl ω genügt und welche nach den gedachten Festsetzungen eine völlig bestimmte ist, zurück, so möge die Summe der absoluten Beträge ihrer Koeffizienten, vermehrt um die Zahl $n-1$, wo n den Grad von ω angibt, die *Höhe* der Zahl ω genannt und mit N bezeichnet werden; es ist also, unter Anwendung einer üblich gewordenen Bezeichnungsweise:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \tag{3}$$

Die Höhe N ist danach für jede reelle algebraische Zahl ω eine bestimmte positive ganze Zahl; umgekehrt gibt es zu jedem positiven ganzzahligen Werte von N nur eine endliche Anzahl algebraischer reeller Zahlen mit der Höhe N; die Anzahl derselben sei $\varphi(N)$; es ist beispielsweise $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Es lassen sich alsdann die Zahlen des Inbegriffes (ω), d. h. sämtliche algebraischen reellen Zahlen folgendermaßen anordnen: man nehme als erste Zahl ω_1 die eine Zahl mit der Höhe $N = 1$; lasse auf sie, der Größe nach steigend, die $\varphi(2) = 2$ algebraischen reellen Zahlen mit der Höhe $N = 2$ folgen, bezeichne sie mit ω_2, ω_3; an diese mögen sich die $\varphi(3) = 4$ Zahlen mit der Höhe $N = 3$, ihrer Größe nach aufsteigend, anschließen; allgemein mögen, nachdem in dieser Weise sämtliche Zahlen aus (ω) bis zu einer gewissen Höhe $N = N_1$ abgezählt und an einen bestimmten Platz gewiesen sind, die reellen algebraischen Zahlen mit der Höhe $N = N_1 + 1$ auf sie folgen, und zwar der Größe nach aufsteigend; so erhält man den Inbegriff (ω) aller reellen algebraischen Zahlen in der Form:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der νten reellen algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe (ω) vergessen ist.

§ 2.

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Wir gehen zu dem Ende von dem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ aus, welches uns beliebig vorgegeben sei, und es sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen unserer Reihe (4), welche im Innern dieses Intervalles (mit Ausschluß der Grenzen) liegen, mögen mit α', β' bezeichnet werden, und es sei $\alpha' < \beta'$; ebenso bezeichne man in unserer Reihe die ersten beiden Zahlen, welche im Innern von $(\alpha' \ldots \beta')$ liegen, mit α'', β'', und es sei $\alpha'' < \beta''$, und nach demselben Gesetze bilde man ein folgendes Intervall $(\alpha''' \ldots \beta''')$ u. s. w. Hier sind also $\alpha', \alpha'' \ldots$ der Definition nach bestimmte Zahlen unserer Reihe (4), deren Indizes im fortwährenden Steigen sich befinden, und das gleiche gilt von den Zahlen $\beta', \beta'' \ldots$; ferner nehmen die Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots$ ihrer Größe nach fortwährend zu, die Zahlen $\beta', \beta'', \ldots$ nehmen ihrer Größe nach fortwährend ab; von den Intervallen $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ... schließt ein jedes alle auf dasselbe folgenden ein. — Hierbei sind nun zwei Fälle denkbar.

Entweder die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist endlich; das letzte von ihnen sei $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$; da im Innern desselben höchstens eine Zahl der Reihe (4) liegen kann, so kann eine Zahl η in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in (4) enthalten ist, und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. —

Oder die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich groß; dann haben die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, weil sie fortwährend ihrer Größe nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen, einen bestimmten Grenzwert α^∞; ein gleiches gilt für die Zahlen $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, weil sie fortwährend ihrer Größe nach abnehmen, ihr Grenzwert sei β^∞; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ein Fall, der bei dem Inbegriffe (ω) aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt), so überzeugt man sich leicht, wenn man nur auf die Definition der Intervalle zurückblickt, daß die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ *nicht* in unserer Reihe enthalten sein kann[1]; ist aber $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so genügt jede Zahl η im Innern des Intervalles $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ oder auch an den Grenzen desselben der gestellten Forderung, nicht in der Reihe (4) enthalten zu sein. —

[1] Wäre die Zahl η in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo p ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn ω_p liegt *nicht* im Innern des Intervalles $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, während die Zahl η ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt.

9-4

Die in diesem Aufsatze bewiesenen Sätze lassen Erweiterungen nach verschiedenen Richtungen zu, von welchen hier nur eine erwähnt sei:

„Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ eine endliche oder unendliche Reihe voneinander linear unabhängiger Zahlen (so daß keine Gleichung von der Form $a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \cdots + a_n \omega_n = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff (Ω) aller derjenigen Zahlen Ω, welche sich als rationale Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten aus den gegebenen Zahlen ω darstellen lassen, so gibt es in jedem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in (Ω) enthalten sind."

In der Tat überzeugt man sich durch eine ähnliche Schlußweise wie in § 1, daß der Inbegriff (Ω) sich in der Reihenform

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\nu, \ldots$$

auffassen läßt, woraus, mit Rücksicht auf diesen § 2, die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ein ganz spezieller Fall des hier angeführten Satzes (in welchem die Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \ldots$ eine endliche und der Grad der rationalen Funktionen, welche den Inbegriff (Ω) liefern, ein vorgesehener ist) ist, unter Zurückführung auf Galoissche Prinzipien, von Herrn B. Minnigerode bewiesen worden. (Siehe Math. Annalen, Bd. 4, S. 497.)

[Anmerkung.]

Die vorstehende Abhandlung, welche die Reihe der mengentheoretischen Arbeiten eröffnet, hat es noch ausschließlich mit dem elementaren Begriff der „abzählbaren Mengen" zu tun, indem gezeigt wird, daß sowohl die Gesamtheit der rationalen wie die der *algebraischen* Zahlen unter diesen Begriff fallen, *nicht* aber die der reellen Zahlen eines endlichen Intervalles überhaupt. Der *erste* Nachweis, der merkwürdigerweise im Titel ausschließlich zum Ausdruck kommt, ist relativ leicht und ergibt sich eigentlich von selbst aus dem Begriff der algebraischen Zahl, sobald die Frage erst einmal gestellt ist. Dagegen ist der im § 2 geführte Beweis für die „Nichtabzählbarkeit" der reellen Zahlen Cantor, wie er selbst sagt, erst nach vergeblichen Versuchen unter Schwierigkeiten gelungen. Er bildet für uns heute das ungleich tiefere Ergebnis der vorliegenden Untersuchung und ist auch in seiner Methode typisch für die spezifisch mengentheoretische Schlußweise. Erst durch den Nachweis, daß es auch „nicht-abzählbare" wohldefinierte Gesamtheiten gibt, gewinnt der Begriff der „Abzählbarkeit" Sinn und Bedeutung, und der Übergang zum allgemeinen Begriff der „Mächtigkeit" ist dann nur noch ein zweiter Schritt. — Die Terminologie ist in dieser grundlegenden Arbeit noch nicht ausgebildet: anstatt „Menge" heißt es noch: „Gesamtheit" oder „Inbegriff", und auch das Wort „abzählbar" findet sich hier noch nicht: es ist immer nur von einer „eindeutigen Zuordnung" der Elemente einer Gesamtheit zu denen einer anderen die Rede. — Besondere Erläuterungen sind bei der Klarheit der Cantorschen Darstellung wohl nicht erforderlich. Nicht ganz ersichtlich ist übrigens, warum Cantor seinen Satz auf die „reellen" algebraischen Zahlen beschränkt, während doch seine ganze Beweisführung unmittelbar auf *alle* (reellen wie komplexen) algebraischen Zahlen anwendbar ist.

Opgave 3.

En mængde kaldes Dedekind-uendelig hvis den kan afbildes 1-1 på en ægte delmængde af sig selv.

En mængde kaldes almindelig endelig hvis den er tom eller der eksisterer en 1-1 afbildning af mængden på {1,2,3,...,n} for et naturligt tal n.

Argumentér for at Dedekind-uendelig og alm. uendelig er det samme. Hvilke principper benyttes ?

Opgave 4

Vis at der ikke er en 1-1 afbildning af en mængde S på mængden af alle dens delmængder P(S).

Bevis at der er en 1-1 afbildning af mængden R af relle tal på mængden P(N) af alle delmængder af de naturlige tal (og dermed at N og R ikke har samme kardinalitet).

Vink: Antag at der er en 1-1 afbildning φ af S på P(S). Betragt mængden af de x hvor $x \notin \varphi(x)$.

NOTATION :

To mængder A og B siges at have samme <u>mægtighed</u> (eller <u>kardinalitet</u> eller <u>kardinaltal</u>) hvis der findes en bijektion φ : $A \to B$. Vi skriver så $|A| = |B|$.

En relation $\leq$ på en mængde M kaldes en <u>ordens-relation</u>, og M kaldes en (partielt) <u>ordnet mængde</u> hvis :

1) $x \leq x$
2) $x \leq y$ og $y \leq x \Longrightarrow x = y$
3) $x \leq y$ og $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

M kaldes <u>totalt ordnet</u> hvis
4) $\forall x,y \in M$: $x \leq y$ eller $y \leq x$

En totalt ordnet mængde kaldes <u>velordnet</u> hvis
5) Enhver ikke-tom delmængde af M har et mindste element.

En afbildning $\varphi : (M,\trianglelefteq) \to (N,\trianglelefteq)$ kaldes <u>ordensbevarende</u> hvis $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$. Hvis φ er en ordensbevarende bijektion kaldes den en <u>ordensisomorfi</u>.

To velordnede mængder siges at have samme <u>ordinaltal</u> hvis de er ordensisomorfe.

<u>OPGAVE 5</u>

a) Vis at $|Z| = |N|$ og at $|N| = |N \times N|$.

b) Findes der en ordensisomorfi $Z \longrightarrow N$ når begge mængder udstyres med den sædvanlige ordning ?

<u>OPGAVE 6</u>

a) Vis at $[0,1]$ og $[0,1[$ har samme kardinalitet.
Vink: se på en følge, f.eks. 1, 1/2, 1/3, ...

b) Findes der en kontinuert bijektiv **afbildning $f : [0,1] \to [0,1[$?**

c) Findes der en ordensisomorfi af $[0,1]$ på $[0,1[$?

9-7

OPGAVE 7

1) Lad $(A,\leq)$ være en velordnet mængde. Antag at A har et største element α_1. Vis at der eksisterer en endelig delmængde A' $=\{\alpha_n<\alpha_{n-1}<\ldots<\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1\}$ af A så der ikke er elementer fra A mellem α_{i+1} og α_i og så A\A' ikke har et største element.

2) Lad $(A,\leq)$ være en uendelig velordnet mængde. Vis at der findes en omordning af A (dvs. A udstyret med en anden velordning) som ikke er ordensisomorf med $(A,\leq)$.

3) Lad $(A,\leq)$ være en fast velordnet mængde, og lad $(B,\leq)$ betegne en velordnet mængde. Vis at

$$|A| = |B|$$
$$\Downarrow$$
der eksisterer en ordensisomorfi mellem $(A,\leq)$ og $(B,\leq)$

netop når A er endelig.

Bemærkning: Det betyder at for endelige mængder er ordinaltallet for en velordnet mængde bestemt ud fra kardinaltallet, så man ikke behøver at skelne mellem ordinaltallet 5 og kardinaltallet 5. For uendelige mængder er der mange ordinaltal hørende til mængder med samme kardinaltal.

Georg Cantor og den transfinite mængdelære

Lars Mejlbo

Matematisk Institut
Aarhus Universitet
Ny Munkegade. Bygning 530
DK-8000 Århus C. Danmark

Indledning

Georg Cantor levede fra 1845 til 1918, så han er relativt nutidig. Men til trods for dette — eller måske netop på grund heraf — kun meget lidt enighed om hans indflydelse på den almindelige matematik og hans religiøsitets indflydelse på hans matematik.

De tre mest kendte biografier på vestlige sprog er vel Meschkowski [9], Dauben [4] og Purkert og Ilgauds [12], desuden har Dugac [5] en grundig omtale af Cantor, mens Edwards [6] er vigtig på grund af sin vurdering af Kroneckers indsats, selvom den kun lige omtaler Cantor. Der findes også på russisk en hel række afhandlinger. specielt af experten Medvedev f.ex. [7], men der har jeg måttet nøjes med anmeldelser. da mit russiske ikke er op til den standard, der kræves.

De tre første er ikke i tvivl om Cantors betydning, mens Dugac og Edwards har andre jern i ilden. Medvedev er i tvivl om religiøsitetens betydning.

I det følgende har jeg stort set holdt mig til de fire førstnævnte, samt til Cantors samlede værker [2] og hans brevvexling med Dedekind [3].

Hans samlede værker udgør kun et bind, hvoraf kun en del er mængdelære, og de volder matematisk set ingen kvaler. Man skal blot huske på, at mange begreber, der senere er blevet velkendte, først er fundet af Cantor, og derfor ikke altid er behandlet på den mest elegante måde — det hører en senere tid til.

Hans filosofiske og religiøse overvejelser er derimod uvante, og det har de også været i samtiden. Der er, som sagt, en vis uenighed om, hvor meget de har betydet for hans matematik.

Kort biografi

Cantors far kom fra København til Skt. Petersborg, hvor Georg er født. Han var en ret succesrig forretningsmand. og selvom han af helbredsgrunde levede af sine penge fra 1856 i Frankfurt am Main, så efterlod han en formue til Georg Cantor.

Det kunne nok tiltrænges, da denne var därligt aflagt som professor i matematik i Halle. På en eller anden måde havde Georg Cantor lagt sig ud med de myndigheder. der bestemte hans løn. ligesom han — efter egen mening — blev forfulgt af myndighederne i Berlin, når han søgte et mere "passende" job f.ex. i Göttingen eller Berlin.

Det bringer os måske ind på spørgsmålet om Georg Cantor var jøde. Dette — sådan set ret ligegyldige spørgsmål — blev bragt op nazisterne i 1930'erne. De så gerne, at mængdelæren blev fordømt som jødisk, altså som et utyske. Men der er intet, der tyder i den retning (se [12] s. 15–16).

Cantor kom altså til Tyskland som 11 årig og blev der resten af sit liv. Han studerede i Zürich og efter farens død 1863 i Berlin. hvor han fulgte forelæsninger af Weierstrass, Kummer og Kronecker. Han skrev sin disputats om et talteoretisk emne i 1867, hvorefter han underviste ved et berlinsk gymnasium i nogle måneder, samtidig med at han deltog i det matematiske liv i Berlin. I 1869 habiliterede han sig i Halle, og her blev han resten af sit liv.

I 1874 blev han gift, og i 1880'erne byggede han hus i Halle, han havde da opgivet at få en bedre stilling.

Han var meget religiøs. Faren, som påvirkede ham stærkt, var evangelisk kristen, og selv var han medlem af den evangeliske kirke til sin død, men han har ikke været særlig ortodox. Han havde en del kontakt med katolske lærde, og han var stærkt optaget af den nye katolske, thomistiske filosofi.

I 80'erne og 90'erne deltog han i den dengang standende strid, om Bacon var den egentlige forfatter til Shakespeares værker, hvad han brugte mange penge på at bevise.

Dette bringer os måske til hans sindsygdom. Der er blevet givet alle mulige forklaringer lige fra psykoanalytiske (den dominerende far) og til, at der ikke er langt fra geni til galskab. Mere sobert synes han at have lidt af manio-depressivitet en sygdom, som vel er mere fysisk end psykisk baseret, omend de enkelte anfald kan fremkaldes af en stærk psykisk påvirkning. Han blev syg første gang i 1884. og efter 1899 skete det oftere og oftere. Han døde på nerveklinikken i Halle i januar 1918.

3. Trigonometriske rækker

Cantor var ikke den første matematiker, der betragtede aktuelt uendelige mængder. Den noget ældre Dedekind må nævnes. Han synes i brevvexlingen med Cantor, hverken særlig overrasket eller interesseret — i begyndelsen. Dedekind brugte — som nogle matematikere før ham og mange efter — "færdige" mængder, uden at han tænkte nærmere over, om disse var endelige eller uendelige. Det går så langt, at Dieudonné, der i 30'erne og 40'erne var en af stifterne af Bourbaki. vurderer Cantors indsats som original, men uden større interesse for den almindelige matematiker (se forordet til [5]).

Cantor var heller ikke den første logiker og filosof, der forsøgte sig med det absolut uendelige. Her må man vel specielt nævne Bolzano, der i det ejendommelige værk "Paradoxien des Unendlichen" fra 1851 [1] gik ind for existensen af det aktuelt uendelige og forsøgte sig med en regning med uendelige tal. Han lå imidlertid for

1-8

meget under for Euklids axiom "Det hele er større end en del af det" til at det kunne lykkes. -

Cantor habiliterede sig i Halle med en afhandling om talteori, men kom hurtigt under påvirkning af seniorprofessoren Heine (kendt fra Heine-Borels sætning, som har meget lidt at gøre med Heine), der på det tidspunkt beskæftigede sig med entydighedsproblemet for trigonometriske rækker.

Dette kan formuleres på følgende måde: Hvis rækken

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

er konvergent med sum 0 i $[-\pi,\pi] \setminus P$, hvor $P \subset [-\pi,\pi]$ er en punktmængde. Er koefficienterne 0, når P opfylder "visse betingelser"?

Heine havde delvis løst problemet for P endelig, men han havde måttet forudsætte, at rækken konvergerede "næsten uniformt". I en brillant serie afhandlinger (se [2] s. 71–108) løste Cantor problemet, idet han efterhånden løsnede betingelserne på P, indtil han i 1872 blot forudsatte, at P er af "ν-te art".

Hvis P er en uendelig begrænset punktmængde, så har den mindst ét *fortætningspunkt*, og mængden af fortætningspunkter betegnede Cantor med P'. Hvis P' er uendelig, så betegnes mængden af dens fortætningspunkter med P'' o.s.v. Der gælder, at

$$P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq \ldots \supseteq P^{(\nu)} \tag{1}$$

og hvis $P^{(\nu)} \neq \emptyset$ er endelig, så kaldes P af "ν-te art".

Bemærk, at P *ikke* er med i følgen (1). Hvis $P \supseteq P'$, så er P lukket (et begreb, der ligesom fortætningspunkt, er indført af Cantor. Hvis $P = P'$ kaldes P *perfekt*, hvilket han også har indført. Mængderne P', P'' etc. kaldes de *afledede* af P).

I beviset fra 1872 forudsætter han, at ν er et *endeligt*, naturligt tal, men han gik videre (måske allerede i 1872, men i hvert fald senere) og konstaterede, at hvis $P^{(\nu)} \neq \emptyset$ for alle endelige ν, så kan man definere

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} P^{(\nu)}$$

og der vil gælde, at $P^{(\infty)} \neq \emptyset$. Man kan da gå videre, og det er naturligt at definere

$$P^{(\infty+1)} = (P^{(\infty)})', P^{(\infty+2)}, \ldots$$

$$P^{(2\infty)} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} P^{(\infty+\nu)},$$

o.s.v.

På den måde kunne han i 1880 definere den afledede

$$P^{(n_0\infty^\nu + n_1\infty^{\nu+1} + \cdots + n_0)}$$

af P.

4. Nogle mægtigheder

Der er en spændende brevvexling mellem Cantor og Dedekind, hvoraf den matematiske del op til 1882 er udgivet i 30'erne [3].

Den tager fat i slutningen af 1873, hvor Cantor spørger Dedekind, om det er let at afgøre om de reelle tal kan bringes i en - entydig korrespondance med de naturlige tal — har samme *mægtighed* for at bruge en betegnelse, som Cantor indførte senere. Han har selv svært ved at afgøre det, men han vil gerne vide, om dette er en personlig, psykologisk vanskelighed, eller om den er "objektiv"?

Cantor bemærker, at de rationale tal let kan vises at have samme mægtighed som mængden af naturlige tal, så det har intet at gøre med, at de reelle tal ligger overalt tæt, for det gør de rationale tal.

Dedekinds svar er ikke bevaret, men man kan se af hans "brevbøger" og af Cantors gensvar, at Dedekind ikke kunne besvare spørgsmålet, men at han iøvrigt ikke fandt det værd at spilde tid på! Han bemærkede dog, at de *algebraiske* tal udgør en tællelig mængde, hvad Cantor sikkert godt vidste.

De algebraiske tal er (komplexe) tal, der er rødder i en algebraisk ligning med heltalskoefficienter. — De ikke-algebraiske tal kaldes *transcendente*.

Det at vise, at mængden af reelle tal har større mægtighed end mængden af naturlige tal, ville altså give et existensbevis for transcendente tal på en anden måde end Liouville, der havde givet konkrete exempler på transcendente tal.

Dette cantorske argument virkede slående på Dedekind.

I december 1873 lykkedes det så Cantor at vise den påstand, at de reelle tal *ikke* kan opstilles i en følge, og altså har større mægtighed end de naturlige tal. Jeg har gengivet en let moderniseret udgave af Cantors oprindelige bevis, samt af det bevis, som vel har fået fortrinsret, nemlig Cantors *diagonalmetode*, der stammer fra 1891, og hvormed man kan bevise existensen af større og større mægtigheder (se [8] s. 4.33 ff.).

Hermed havde Cantor ikke alene vist existensen af transcendente tal (og det er det, han lægger vægt på i afhandlingen fra 1874, [2], s. 115–118), men han viste også, at der existerer forskellige uendeligheder, og det er vel det, som vi vil lægge vægt på.

Hvis man altså accepterer mængdelæren, for det behøver man ikke! Kronecker og hans efterfølger *intuitionisterne* og *konstruktivisterne* accepterer *ikke* den klassiske mængdelære og den dermed forbundne logik, de accepterer altså ikke de afsluttede, uendelige mængder. Derfor blev specielt Cantors — men også Dedekinds — resultater til gøgl og usundt hjernespind for Kronecker, der jo ikke lagde skjul på sin tro. Der er altså en rational grund til Kroneckers modstand mod Cantor. Man kan så kalde Kronecker en dogmatiker eller ej, det kommer vel an på, hvilken holdning man selv indtager, og om man er tolerant!

Efter dette sidespring vil vi fortsætte med at acceptere den klassiske mængdelære, det er det nemmeste, og der er såmænd besværligheder nok.

Ikke længe efter havde Cantor et nyt spørgsmål til Dedekind: Har et kvadrat samme mægtighed som dets side? Kan man med andre ord lave en en-entydig korrespondance mellem R^m og R^n, $m \neq n$.

Selvfølgelig kan man ikke det — mente Cantor og alle han spurgte. Men i 1877 viste Cantor, at det kan man godt alligevel (se [8] s. 4.38 ff for et bevis, som er lettere end Cantors og nogle kommentarer. Beviset stammer fra J. König).

Det var en alvorlig sag for tilsyneladende bryder dimensionsbegrebet sammen. Hvis man kan afbilde R^m en-entydigt på R^n, så er en funktion af m variable også en funktion af n variable, og hvad så?

Det var Cantors mening, men Dedekind indså, at Cantors funktion er højst diskontinuert, og man måtte forlange kontinuitet.

Cantor gav ham ret og forsøgte at vise, at der ikke findes nogen kontinuert bijektion af R^m på R^n for $m \neq n$. Hans bevis blev publiceret i 1879 (se [2] s. 134–138), men det er ikke holdbart, og selvom visse specialtilfælde blev vist ($m = 2$, $n = 1$ er meget simpelt, se f.ex. [8] s. 4.40), så blev sætningen først vist generelt af den hollandske matematiker Brouwer i 1911. Brouwer er nok mest kendt som intuitionismens grundlægger, men han havde en "klassisk" periode ca. 1910.

5. Ordinaltallene

I 1879–1884 skrev Cantor sex afhandlinger til Mathematische Annalen under fællestitlen "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" ([2] s. 139–244), og de regnes af flere for højdepunktet af Cantors skaberevne.

Heri indførte han en række topologiske og en række mængdeteoretiske begreber. Det vil jeg stort set ikke komme ind på, blot omtale indførelsen af *ordinaltallene* og nogle sætninger om dem.

I den anden afhandling i serien indførte han de *uendelighedssymboler*, som jeg allerede har omtalt i slutningen af afsnit 3, og i den femte afhandling frigjorde han disse tal fra det topologisk punktmængdeteoretiske og skabte ordinaltallene. Denne afhandling er den længste og den filosofisk — men næppe matematisk — vanskeligste afhandling i serien. Cantor udgav den som selvstændig pamflet under titlen: "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre".

For at definere ordinaltallene indførte han to "skabelsesprincipper". Det første er det, hvoraf de naturlige tal skabes, m.a.o. ved at lægge 1 til:

1. princip. Til ethvert ordinaltal α findes et næstfølgende $\alpha + 1$.

Det andet princip er det egentlige nye. Cantor påstod, at der til enhver følge af ordinaltal uden sidste element, f.ex. de naturlige tal, findes et ordinaltal, der følger lige efter. Lige efter de naturlige tal kommer altså det første uendelige ordinaltal, som Cantor nu kaldte ω i stedet for ∞, der — meget groft sagt — var på overarbejde. Altså:

2. princip. Til enhver succession af ordinaltal uden sidste element findes et ordinaltal α, som følger lige efter successionen.

Strengt taget skal man vel også begynde et sted. Cantor anså dette for en selvfølgelighed, og han begyndte med 1.

Det første princip giver de naturlige tal

$$1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots,$$

og det andet princip giver så ω. Det første princip igen giver

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots$$

op gennem alle de naturlige tal ν. Det andet princip giver så $\omega 2$. Cantor skrev på dette tidspunkt 2ω, men han rettede det senere, og det har man fulgt ham i.

Ved at bruge det første, det andet, det første igen o.s.v. får vi

$$\omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \dots, \omega 2 + \nu, \dots$$
$$\omega 3, \omega 3 + 1, \omega 3 + 2, \dots, \omega 3 + \nu, \dots$$
$$\dots$$
$$\omega\mu, \omega\mu + 1, \omega\mu + 2, \dots, \omega\mu + \nu, \dots$$

I denne succession er der ikke noget største, så vi kan bruge det andet princip til at skabe ω^2. Vi kan derefter bruge det første og andet princip igen og igen til først at få alle "polynomier" i ω med endelige koefficienter og potenser, og senere ω^ω o.s.v.

For at kunne inddele alle disse ordinaltal (I), (II), ... indførte Cantor et "hæmningsprincip". For exempel er (I) de naturlige tal, dvs. de ordinaltal hvis forgænger udgør en endelig mængde; mens *den anden talklasse* (II) er de ordinaltal α, hvor mængden af forgængere har samme mægtighed som klasse (I). For at bruge en moderne betegnelse så er talklassen altså de mængder

$$\{x | x \text{ ordinaltal og } x < \alpha\},$$

som har den foregående talklasses mægtighed.

Således vil tallene af klasse (II) være en succession uden største element, og derfor følger ω_1 lige efter. Det er det første ikke-tællelige ordinaltal.

Der kræves naturligvis en del sætninger for at vise, at alt dette giver mening, men dem viste Cantor (se originalafhandlingen eller [8] s. 4.65 ff).

Der findes ikke noget største ordinaltal, for vi kan altid lægge 1 til ifølge første princip.

Klassen af ordinaltal er altså en succession uden største element, men det andet princip kan så bruges, og så får vi alligevel et største.

Paradox!

6. Cantor og mængdelærens paradoxer

Dette paradox er kendt under navnet "Burali-Fortis paradox", men allerede Cantor protesterede i et brev til Grace Chisholm Young i 1907 og påstod, at Burali-Forti havde misforstået det hele. Brevet er delvis gengivet både på tysk og i engelsk oversættelse af Moore og Garciadiego [10], og herfra gengivet på tysk i mine noter [8] s. 4.97.

Det har ikke berørt matematikerne og matematikhistorikerne, der stadig taler om "Burali-Fortis paradox", måske fordi de har svært ved at læse det specielle Peano-prægede italienske, som Burali-Forti skrev (det er i hvert fald G.C. og ægtemanden W.H. Youngs mening, se [13]; men man kan naturligvis mene, at de skriver af efter hinanden).

Det, der er mest interessant, er naturligvis Cantor. Purkert har i en afhandling fra 1986 [11], uddybet i 1987 ([12] s. 147 ff, se også [8]) gjort det meget sandsynligt, at Cantor allerede i 1883 så det nævnte paradox, og at det ikke berørte ham, fordi han så rækken af ordinaltal som et billede på Guds evighed, som jo netop ikke kan behandles matematisk. Ifølge Purkert ville det have været en stor skuffelse for den religiøse Cantor, hvis der ikke havde vist sig paradoxer i mængdelæren.

Ordet *paradox* er måske dårligt valgt, *antinomi* er bedre. Man bruger ordet "paradox" om ting, der ikke er logiske selvmodsigelser, men blot ser underlige ud. Men mængdelærens "paradoxer" er logiske selvmodsigelser — altså antinomier.

Om Cantors betydning

Der er ingen tvivl om, at Cantor har betydet meget for matematikkens grundlag. Logikere og filosoffer er glade for ham.

For den almindelige matematiker har man elimineret brugen af de uendelige tal og erstattet dem med andre transfinite metoder, så for ham eller hende er det vel nok vigtigst at kende de tællelige mængder, og de resultater, som jeg har fremstillet i afsnit 4.

Desuden er der de punktmængdeteoretiske og topologiske begreber, som først er fremsat af Cantor, dem får man ind tidligt og uden at nævne hans navn.

Der er og specielt har været megen ballade om mængdeteorien, som den er indført i skolerne. Men det har Cantor vel ikke ret meget med at gore, omend man ikke skal undervurdere, at der i vort århundrede har været en del grundlagsteoretiske slagsmål, der er løbet sammen med hele den nyorientering og uro, der også har været.

Det er måske for tidligt at afgøre Cantors endelige betydning.

Litteratur

[1] B. Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig 1851 (Genoptryk, Darmstadt 1964).

[2] G. Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Herausg. E. Zermelo), Julius Springer, Berlin 1932 (2. genoptryk 1980).

[3] Cantor -Dedekind. *Briefwechsel* (Herausg. E. Noether, J. Cavailles) Hermann, Paris 1937.

[4] J.W. Dauben. *G. Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite.* Harvard University Press, Cambridge, Mass. and London, England, 1979.

[5] P. Dugac. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976.

[6] H.M. Edwards. *An appreciation of Kronecker*, Math. Intelligencer, 9, 1987, 28–35.

[7] F.A. Medevedev. *Cantors mængdelære og teologi (russisk)*, Vopr. Istor. Estast-vazn. Tekn. 1985, Nr. 2, 87–95, [Anm. D. Stefanescu, Zentralblatt Math. 678. Anm. 0101].

[8] L. Mejlbo. *Om uendelighedsbegrebet i matematikken*, Elementærafdeling Nr. 21, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus 1988.

[9] H. Meschkowski. *G. Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1983.

[10] G.N. Moore, A. Garciadiego. *Burali-Forti's paradox*, Historia Math. 8, 1981, 313–350.

[11] W. Purkert. *Georg Cantor und die Antinomien des Mengenlehre*, Bull. Soc. Math. Belg.(A), 38, 1986, 313–327.

[12] W. Purkert, H.J. Ilgauds. *Georg Cantor, 1845–1918.* Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1987.

[13] G.C. Young, W.H. Young. Anm. i Mathematical Gazette 14, 1928–29, 98–104.

Omtalte matematikere o.a.

Bacon, Francis, engelsk filosof og statsmand, 1561–1626.
Bolzano, Bernard, böhmisk filosof og matematiker, 1781–1848.
Borel, Emile, fransk matematiker, 1871–1956.
Bourbaki, Nicholas, fransk matematikerkollektiv.
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, nederlandsk matematiker, 1881–1966.
Burali-Forti, Cesare, italiensk matematiker, 1861–1931.
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Phillip, tysk matematiker, 1845–1918.
Cantor, Georg Woldemar, tysk (!) forretningsmand, 1814 (1809?)–1863.
Dauben, Joseph Warren, USA matematikhistoriker, nulevende.
Dedekind, Richard, tysk matematiker, 1831–1916.
Dieudonné, Jean, fransk matematiker og matematikhistoriker, nulevende.
Dugac, Pierre, fransk matematikhistoriker, nulevende.
Edwards, W.M., USA matematikhistoriker, nulevende.
Euklid, græsk matematiker, ca. 300 f.Kr.
Heine, Heinrich Eduard, tysk matematiker, 1821–1881.
Ilgauds, Hans Joachim, tysk matematikhistoriker, nulevende.
König, Julius, ungarnsk matematiker, 1849–1913.
Kronecker, Leopold, tysk matematiker, 1823–1891.
Kummer, Ernst Eduard, tysk matematiker, 1810–1893.
Liouville, Joseph, fransk matematiker, 1809–1882.
Medvedev, F.A., USSR matematikhistoriker, nulevende.
Meschowski, Herbert, tysk matematiker og matematikhistoriker, nulevende.
Peano, Guiseppe, italiensk matematiker, 1858–1932.
Purkert, Walter, tysk matematikhistoriker, nulevende.
Shakespeare, William, engelsk forfatter, 1564–1616.
Weierstrass, Karl, tysk matematiker, 1815–1897.
Young, Grace Chisholm, engelsk matematiker, 1868–1944.
Young, William Henry, engelsk matematiker, 1863–1942.

9-12

points of a continuous manifold B of dimension b on the other, then this *correspondence itself*, if a and b are *unequal, is necessarily thoroughly discontinuous.*

18.C4 Cantor on the uncountability of the real numbers

(a) The 1874 proof

By a real algebraic number will be understood in general a real numerical quantity ω which satisfies a non-identity equation of the form

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

where $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ are integers; we may consider that the numbers n and a_0 are positive, the coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ have no common factors, and the equation (1) is irreducible.

[Cantor first shows that the algebraic numbers are countable, as follows, starting with his definition of their *height*, N]

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

The height N is then a definite positive integer for each real algebraic number ω, conversely for each value of N there is only a finite number of real algebraic numbers with height N; let the number of these be $\phi(N)$ then for example $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 4$. This implies that the totality of the collection (ω), i.e. of all real algebraic numbers, can be ordered in the following way: one takes as the first number the unique number ω_1 with height 1; setting it aside, as the index increases the $\phi(2) = 2$ real algebraic numbers with $\phi(2) = 2$ follow, denote them by ω_2 and ω_3; to these may be attached the $\phi(3) = 4$ numbers with height $N = 3$ whose index is still greater; quite generally one may count all the numbers in (ω) up to a certain height $N = N_1$ in this way, and the real algebraic numbers with height $N = N_1 + 1$ will then follow at a definite place, and the index will increase, and so one obtains the collection of all real algebraic numbers (ω) in the form:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

and with respect to this ordering one can speak of the nth real algebraic number, and none of the collection (ω) is forgotten.

[Cantor now showed that the collection of real numbers was, however, uncountable, by showing that if they were countable, then given any listing of them we could find a real number which was not in the list. His proof of this was not his diagonal argument, but a clever use of the fact that between any two real numbers there is always a third. Putting his two results together, Cantor now deduced that there are infinitely many transcendental, i.e. non-algebraic numbers.]

(b) The 1891 proof using a diagonal argument

Namely let m and w be any two different characters, and we form the collection M of elements

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

9-13

which depends on infinitely many coordinates, each of which is either m or w. M is the set of all elements E. Amongst the elements of M are for example the following three

$$E' = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E'' = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E''' = (m, w, m, w, \ldots).$$

I now show that such a manifold M does not have the power of the series $1, 2, \ldots, n, \ldots$. This follows from the following theorem.

If $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ is any simply infinite sequence of the manifold M, then there is always an element E_0, of M which does not agree with any E.

To prove this let

$$E_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots),$$
$$E_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots).$$

Here each a_{mn} is a definite m or w. A sequence $b_1, b_2, \ldots, b_n$ will now be so defined for which each b is also equal to m or w and different from a. So if $a_{nn} = m$, then $b_n = w$, and if $a_{nn} = w$, then $b_n = m$. Then we consider the element

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

of M, and one sees without further ado that the equation

$$E_0 = E_m$$

can be satisfied by no integer value of k, since otherwise for that value of k and all integers n

$$b_n = a_{mn}$$

and also in particular

$$b_m = a_{mm}$$

which is excluded by the definition of b_m. It follows immediately from this theorem that the totality of all elements of M cannot be put in the form of a series: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ since otherwise we would have the contradiction that the thing E_0 would be an element of M and also not an element of M.

1 Gennemgå Cantors bevis for tællig-heden af de algebraiske tal. (18c4 a))

2 Gennemgå Cantors diagonalbevis (18.C4 b))

ZERMELO'S AXIOMER

AXIOM I. (Axiom of extensionality [[Axiom der Bestimmtheit]].) If every element of a set M is also an element of N and vice versa, if, therefore, both $M \in N$ and $N \in M$, then always $M = N$; or, more briefly: Every set is determined by its elements.

AXIOM II. (Axiom of elementary sets [[Axiom der Elementarmengen]].) There exists a (fictitious) set, the *null set*, 0, that contains no element at all. If a is any object of the domain, there exists a set $\{a\}$ containing a and only a as element; if a and b are any two objects of the domain, there always exists a set $\{a, b\}$ containing as elements a and b but no object x distinct from both.

AXIOM III. (Axiom of separation [[Axiom der Aussonderung]].) Whenever the propositional function $\mathfrak{E}(x)$ is definite for all elements of a set M, M possesses a subset $M_{\mathfrak{E}}$ containing as elements precisely those elements x of M for which $\mathfrak{E}(x)$ is true.

AXIOM IV. (Axiom of the power set [[Axiom der Potenzmenge]].) To every set T there corresponds another set $\mathfrak{U}T$, the *power set* of T, that contains as elements precisely all subsets of T.

AXIOM V. (Axiom of the union [[Axiom der Vereinigung]].) To every set T there corresponds a set $\mathfrak{S}T$, the *union* of T, that contains as elements precisely all elements of the elements of T.

Eksempel:

$$F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Elementer i F:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Foreningsmængden er så:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

AXIOM VI. (Axiom of choice [[Axiom der Auswahl]].) If T is a set whose elements all are sets that are different from 0 and mutually disjoint, its union $\mathfrak{S}T$ includes at least one subset S_1 having one and only one element in common with each element of T.

We can also express this axiom by saying that it is always possible to *choose* a single element from each element $M, N, R, \ldots$ of T and to combine all the chosen elements, $m, n, r, \ldots$, into a set S_1.[7]

AXIOM VII. (Axiom of infinity [[Axiom des Unendlichen]].) There exists in the domain at least one set Z that contains the null set as an element and is so constituted that to each of its elements a there corresponds a further element of the form $\{a\}$, in other words, that with each of its elements a it also contains the corresponding set $\{a\}$ as an element.

BOG I

I.

Definitioner.

1. Et Punkt er det, som ikke kan deles.

2. En Linie er en Længde uden Bredde.

3. En Linies Grænser ere Punkter.

4. En ret Linie er en Linie, som ligger *lige* mellem Punkterne paa den.

5. En Flade er det, som kun har Længde og Bredde.

6. En Flades Grænser ere Linier.

7. En plan Flade er en Flade, som ligger *lige* mellem de rette Linier i den.

8. En plan Vinkel er Heldningen mellem to Linier, som ligge i samme Plan, have et Punkt fælles og ikke ligge paa ret Linie.

9. Naar de Linier, der indeslutte Vinkelen ere rette, kaldes Vinkelen retlinet.

10. Naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst paa den anden, kaldes lodret paa den anden.

11. En stump Vinkel er en, som er større end en ret.

12. En spids Vinkel er en, som er mindre end en ret.

13. Omkreds er Grænsen for noget.

14. En Figur er det, som indesluttes af en eller flere Omkredse.

15. En Cirkel er en plan Figur, indesluttet af een saadan Linie (som kaldes Periferien), at alle de rette Linier, der kunne drages ud til den fra eet indenfor Figuren liggende Punkt, ere indbyrdes ligestore.

16. Dette Punkt kaldes Centrum i Cirkelen.

17. En Diameter i Cirkelen er en ret Linie, trukken gennem Centrum og begrænset til begge Sider af Cirkelperiferien; den halverer ogsaa Cirkelen.

18. En Halvcirkel er en Figur, som indesluttes af en Diameter og den af Diameteren

FRA Thyra Eibe:
Euklids Elementer I-IV
(Bog udgivet fra forlaget)

afskaarne Periferi. Halvcirkelens Centrum er det samme som Cirkelens.

19. Retlinede Figurer ere saadanne, som indesluttes af rette Linier: tresidede, som indesluttes af tre, firsidede af fire, flersidede af flere end fire rette Linier.

20. Af tresidede Figurer kaldes den, der har alle tre Sider ligestore, en ligesidet, den som kun har to Sider ligestore, en ligebenet, og den, som har alle tre Sider uligestore, en skæv Trekant.

21. Af tresidede Figurer kaldes endvidere den, som har en ret Vinkel, en retvinklet, den, som har en stump Vinkel, en stumpvinklet, den, som har alle tre Vinkler spidse, en spidsvinklet Trekant.

22. Af firsidede Figurer kaldes den, som baade er ligesidet og retvinklet, et Kvadrat, den som er retvinklet, men ikke ligesidet, et Rektangel, den som er ligesidet, men ikke retvinklet, en Rhombe, den som har baade modstaaende Sider og Vinkler ligestore, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en Rhomboide; de øvrige Firsider kunne kaldes Trapezer.

23. Parallele ere de rette Linier, som ligge i samme Plan og, naar de forlænges ubegrænset til begge Sider, ikke mødes til nogen af Siderne.

Forudsætninger.

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret Linie fra et hvilketsomhelst Punkt til et hvilketsomhelst Punkt.

2. At man kan forlænge en begrænset ret Linie i ret Linie ud i eet.

3. At man kan tegne en Cirkel med et hvilketsomhelst Centrum og en hvilkensomhelst Radius.

4. At alle rette Vinkler ere ligestore.

5. At, naar en ret Linie skærer to rette Linier, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere mindre end to rette, saa mødes de to Linier, naar de forlænges ubegrænset, paa den Side, hvor de to Vinkler ligge, der ere mindre end to rette.

Almindelige Begreber.

1. Størrelser, som ere ligestore med den samme, ere indbyrdes ligestore.

2. Naar ligestore Størrelser lægges til ligestore Størrelser, ere Summerne ligestore.

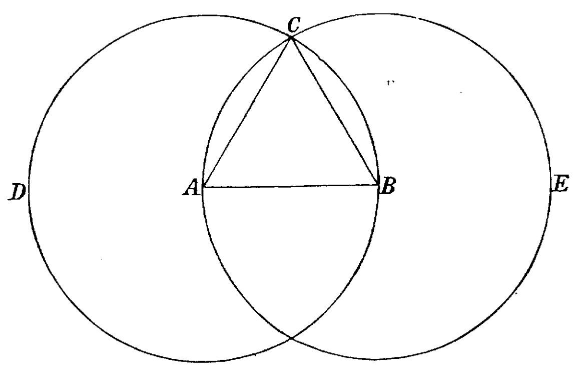
3. Naar ligestore Størrelser trækkes fra ligestore Størrelser, ere Resterne ligestore.

4. Størrelser, der kunne dække hverandre, ere indbyrdes ligestore.

5. Det hele er større end en Del af det.

I.

At konstruere en ligesidet Trekant paa en given begrænset ret Linie.



Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da konstruere en ligesidet Trekant paa den rette Linie AB.

Lad Cirkel BCD være tegnet med A som Centrum og AB som Radius og tillige Cirkel ACE med B som Centrum og BA som Radius, og lad de rette Linier CA og CB være dragne fra Cirklernes Skæringspunkt C til Punkterne A og B.

Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel CDB, er AC = AB. Da endvidere Punkt B er Centrum i Cirkel CAE, er BC = BA. Men det blev ogsaa bevist, at CA er lig AB. Altsaa er baade CA og CB lig AB. Men Størrelser, der ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er CA = CB. Altsaa ere de tre rette Linier CA, AB og BC indbyrdes ligestore.

Altsaa er △ ABC ligesidet, og den er konstrueret paa den givne begrænsede rette Linie AB; hvilket skulde gøres.

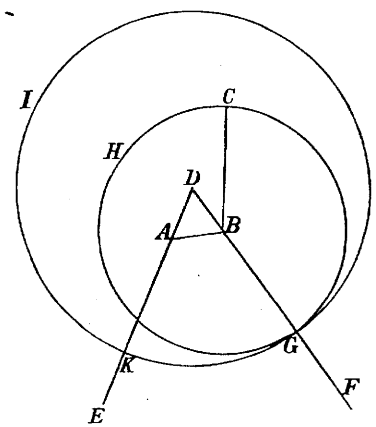
2.

Ud fra et givet Punkt at afsætte en ret Linie lig en given ret Linie.

Lad A være det givne Punkt og BC den givne rette Linie. Man skal da ud fra det givne Punkt A afsætte en ret Linie lig den givne rette Linie BC.

Lad nemlig en ret Linie AB være dragen fra Punkt A til Punkt B, lad der paa den være konstrueret en ligesidet Trekant DAB, lad de rette Linier AE og BF være afsatte i Forlængelse af DA og DB, lad Cirkel CGH være tegnet med B som Centrum og BC som Radius, og lad Cirkel GIK være tegnet med D som Centrum og DG som Radius.

Da nu Punkt B er Centrum i Cirkel CGH, er BC = BG. Da endvidere Punkt D er Centrum i Cirkel GIK, er DK = DG; og paa dem ere Stykkerne DA og DB ligestore; altsaa er Resten AK lig Resten BG. Men det blev ogsaa bevist, at BC er lig BG. Altsaa er baade AK og BC lig BG. Men Størrelser, som ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er AK = BC.



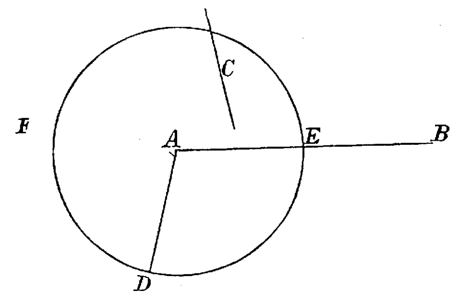
Altsaa er der ud fra det givne Punkt A afsat en ret Linie AK lig den givne rette Linie BC; h. s. g.

3.

Paa den største af to givne uligestore rette Linier at afskære en ret Linie lig den mindste.

Lad AB og C være de to givne uligestore rette Linier, og lad AB være den største af dem. Man skal da paa den største AB afskære en ret Linie lig den mindste C.

Lad AD være afsat ud fra Punkt A lig den givne rette Linie C, og lad Cirkel DEF være tegnet med A som Centrum og AD som Radius.



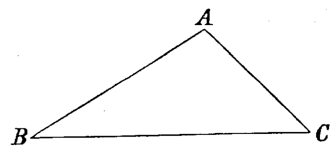
Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel DEF, er AE = AD. Men C er ogsaa lig AD. Altsaa er baade AE og C lig AD. Altsaa er AE = C.

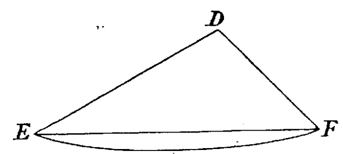
Altsaa er der paa den største AB af to givne uligestore rette Linier AB og C afskaaret AE lig den mindste C; h. s. g.

4.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og de Vinkler, der indesluttes af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de ogsaa have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig AB = DE og AC = DF, og hvor ∠ BAC er lig ∠ EDF. Jeg siger da: at Grundlinie BC vil være lig Grundlinie EF, at △ ABC vil være lig △ DEF, og at de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore, ∠ ABC = ∠ DEF og ∠ ACB = ∠ DFE.





Naar nemlig △ ABC lægges paa △ DEF, idet Punkt A anbringes i Punkt D og den rette Linie AB paa den rette Linie DE, saa vil Punkt B træffe i E, fordi AB er lig DE. Men naar AB dækker DE, saa vil den rette Linie AC falde paa den rette Linie DF, fordi ∠ BAC er lig ∠ EDF. Følgelig vil her Punkt C træffe i Punkt F, fordi AC er lig DF. Men B traf jo i E; følgelig vil Grundlinie BC dække Grundlinie EF. Thi hvis Grundlinie BC ikke dækker EF, naar B træffer i E og C i F, saa ville to rette Linier indeslutte et Rum; og det er umuligt. Altsaa vil Grundlinie BC dække EF og være lig med den. Følgelig vil hele △ ABC dække hele △ DEF og være lig med den; og de øvrige Vinkler ville dække de øvrige Vinkler og være lig med dem, ∠ ABC = ∠ DEF og ∠ ACB = ∠ DFE.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og de Vinkler, der indesluttes af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de ogsaa have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore; hvilket skulde bevises.

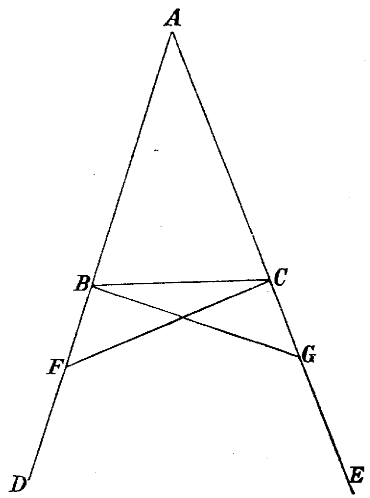
5.

I en ligebenet Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien ligestore; og, naar de ligestore rette Linier ere forlængede, ville Vinklerne under Grundlinien være ligestore.

Lad ABC være en ligebenet Trekant, hvor Side AB er lig Side AC, og lad de rette Linier BD og CE være afsatte i Forlængelse af AB og AC. Jeg siger da: ∠ ABC = ∠ ACB, og ∠ CBD = ∠ BCE.

Lad der nemlig paa BD være taget et vilkaarligt Punkt F, lad der paa den største AE, være afskaaret AG = AF, og lad de rette Linier FC og GB være dragne.

Da nu AF er lig AG og AB er lig AC, saa ere de to Sider FA og AC parvis lig de to Sider GA og AB; og de indeslutte den fælles Vinkel FAG; altsaa vil Grundlinie FC være lig Grundlinie GB; △ AFC vil være lig △ AGB; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore, nemlig ∠ ACF = ∠ ABG og ∠ AFC = ∠ AGB.



Og da hele AF er lig hele AG og paa dem igen AB er lig AC, saa er Resten BF lig Resten CG. Men det blev ogsaa bevist, at FC er lig GB. Altsaa ere de to Sider BF og FC parvis lig de to Sider CG og GB; desuden er ∠ BFC lig ∠ CGB; og deres Grundlinie BC er fælles; altsaa vil △ BFC være lig △ CGB, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore. Altsaa er ∠ FBC = ∠ GCB, og ∠ BCF = ∠ CBG. Da det nu blev bevist, at hele ∠ ABG er lig hele ∠ ACF, og af dem igen ∠ CBG er lig ∠ BCF, saa er Resten ∠ ABC lig Resten ∠ ACB. Og de ligge ved △ ABC's Grundlinie. Men det blev tillige bevist, at ∠ FBC er lig ∠ GCB. Og de ligge under Grundlinien.

Altsaa: i en ligebenet Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien ligestore; og naar de ligestore rette Linier ere forlængede, ville Vinklerne under Grundlinien være ligestore; h. s. b.

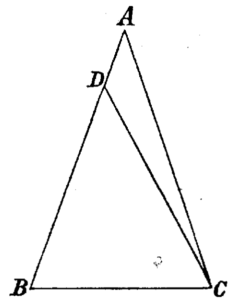
6.

Naar to Vinkler i en Trekant ere ligestore, ville ogsaa de Sider, der ligge overfor de ligestore Vinkler, være ligestore.

Lad ABC være en Trekant, hvor ∠ ABC er lig ∠ ACB. Jeg siger da, at Side AB er lig Side AC.

Thi hvis AB og AC ere uligestore, er en af dem størst. Lad AB være størst, lad der paa den største AB være afskaaret Stykket DB lig den mindste AC, og lad DC være dragen.

Da nu DB er lig AC, og BC er fælles, saa ere de to Sider DB og BC parvis lig de to Sider AC og CB; desuden er $\angle$ DBC = $\angle$ ACB; altsaa er Grundlinie DC lig Grundlinie AB, og $\triangle$ DBC vil være lig $\triangle$ ACB, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa er AB og AC ikke uligestore. Altsaa er AB = AC.



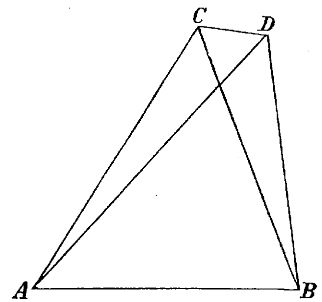
Altsaa: naar to Vinkler i en Trekant ere ligestore, ville ogsaa de Sider, der ligge overfor de ligestore Vinkler, være ligestore; h. s. b.

7.

Naar der fra en ret Linies Endepunkter er konstrueret to rette Linier til eet Punkt, kan man ikke fra de samme Endepunkter konstruere to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien.

Thi hvis det er muligt, saa lad der fra den rette Linie AB's Endepunkter være konstrueret to rette Linier AC og CB til eet Punkt C og desuden fra de samme Endepunkter to andre rette Linier AD og DB parvis lig de første til et andet Punkt D paa samme Side, nemlig DA = CA fra samme Endepunkt A, og DB = CB fra samme Endepunkt B, og lad CD være dragen.

Da nu AC er lig AD, er $\angle$ ACD lig $\angle$ ADC. Altsaa er $\angle$ ADC større end $\angle$ DCB. Altsaa er $\angle$ CDB meget større end $\angle$ DCB.



Paa den anden Side: da CB er lig DB, er $\angle$ CDB = $\angle$ DCB. Men det blev ogsaa bevist, at den er meget større; og det er umuligt.

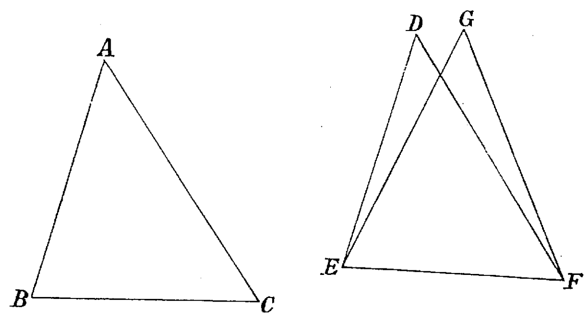
Altsaa: naar der fra en ret Linies Endepunkter er konstrueret to rette Linier til eet Punkt, kan man ikke fra de samme Endepunkter konstruere to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien; h. s. b.

8.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og tillige Grundlinierne ligestore, saa ville de ogsaa have de Vinkler ligestore, som indesluttes af de ligestore rette Linier.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig AB = DE og AC = DF, og lad dem tillige have Grundlinie BC lig Grundlinie EF. Jeg siger da: ∠BAC = ∠EDF.

Thi naar △ABC lægges paa △DEF, idet Punkt B anbringes i Punkt E, og den rette

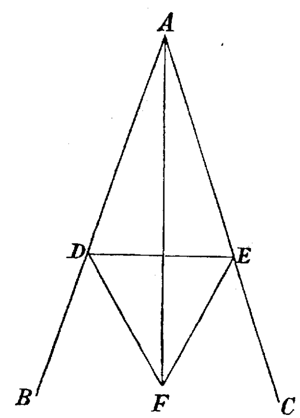


Linie BC lægges paa den rette Linie EF, saa vil Punkt C træffe i F, fordi BC er lig EF. Og naar nu BC dækker EF, saa ville BA og CA ogsaa dække ED og DF. Thi hvis Grundlinie BC dækker Grundlinie EF, mens Siderne BA og AC ikke dække ED og DF, men falde udenfor, f. Ex. i EG og GF, saa vil der fra en ret Linies Endepunkter være konstrueret to rette Linier til eet Punkt, og fra de samme Endepunkter to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien. Men det kan man ikke. Altsaa, naar Grundlinie BC dækker Grundlinie EF, kunne Siderne BA og AC ikke lade være at dække ED og DF. Altsaa ville de dække dem. Følgelig vil ogsaa ∠BAC dække ∠EDF og være lig med den.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og tillige Grundlinierne ligestore, saa ville de ogsaa have de Vinkler ligestore, som indesluttes af de ligestore rette Linier; h. s. b.

9.

At halvere en given retlinet Vinkel.



Lad BAC være den givne retlinede Vinkel. Man skal da halvere den.

Lad der paa AB være taget et vilkaarligt Punkt D, og lad der paa AC være afskaaret AE = AD, lad DE være dragen, lad der paa DE være konstrueret en ligesidet Trekant DEF, og lad AF være dragen. Jeg siger da, at ∠ BAC er halveret af den rette Linie AF

Thi da AD er lig AE, og AF er fælles, saa ere de to Sider DA og AF parvis lig de to Sider EA og AF; og Grundlinie DF er lig Grundlinie EF; altsaa er ∠ DAF = ∠ EAF.

Altsaa er den givne retlinede Vinkel BAC halveret af den rette Linie AF; h. s. g.

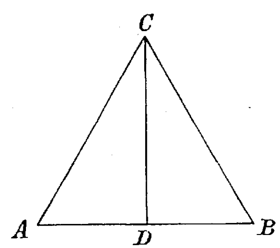
10.

At halvere en given begrænset ret Linie.

Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da halvere den begrænsede rette Linie AB.

Lad der paa den være konstrueret en ligesidet Trekant ABC, og lad ∠ ACB være halveret af den rette Linie CD. Jeg siger da, at den rette Linie AB er halveret i Punkt D.

Thi da AC er lig CB, og CD er fælles, saa ere de to Sider AC og CD parvis lig de to Sider BC og CD; og ∠ ACD er lig ∠ BCD; altsaa er Grundlinie AD lig Grundlinie BD.



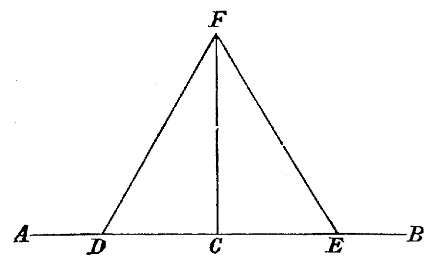
Altsaa er den givne begrænsede rette Linie AB halveret i D; h. s. g.

11.

Fra et givet Punkt paa en given ret Linie at oprejse en ret Linie vinkelret paa den givne.

Lad AB være den givne rette Linie og C det givne Punkt paa den. Man skal da fra Punkt C oprejse en ret Linie vinkelret paa AB.

Lad der være taget et vilkaarligt Punkt D paa AB, lad CE være afsat lig CD, lad der paa DE være konstrueret en ligesidet Trekant FDE, og lad FC være dragen. Jeg siger da, at fra det givne Punkt C paa den givne rette Linie AB er den rette Linie FC oprejst vinkelret paa AB.



Thi da DC er lig CE, og CF er fælles, saa ere de to Sider DC og CF parvis lig de to Sider EC og CF; og Grundlinie DF er lig Grundlinie FE; altsaa er ∠ DCF = ∠ ECF. Og de ligge ved Siden af hinanden. Men naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret. Altsaa ere begge Vinklerne DCF og FCE rette.

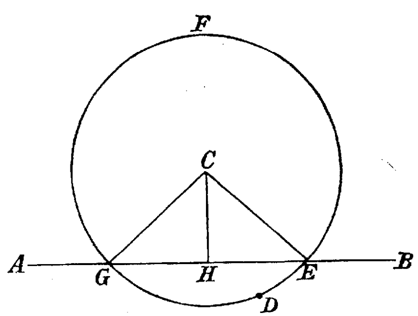
Altsaa er der fra det givne Punkt C paa den givne rette Linie AB oprejst den rette Linie CF vinkelret paa AB; h. s. g.

12.

Fra et Punkt udenfor en given ubegrænset ret Linie at nedfælde en ret Linie lodret paa den givne.

Lad AB være den givne ubegrænsede rette Linie og C det givne Punkt udenfor den. Man skal da fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB nedfælde en ret Linie lodret paa AB.

Lad der nemlig paa den anden Side af den rette Linie AB være taget et vilkaarligt Punkt D, lad Cirkel EFG være tegnet med C som Centrum og CD som Radius, lad den rette Linie EG være halveret i H, og lad de rette Linier CG, CH og



CE være dragne. Jeg siger da, at der fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB er nedfældet den rette Linie CH lodret paa AB.

Thi da GH er lig HE, og HC er fælles, saa ere de to Sider GH og HC parvis lig de to Sider EH og HC; og Grundlinie CG er lig Grundlinie CE; altsaa er $\angle$ CHG $=$ $\angle$ EHC. Og de ligge ved Siden af hinanden. Men naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst paa den anden, kaldes lodret paa den anden.

Altsaa er der fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB nedfældet den rette Linie CH lodret paa AB; h. s. g.

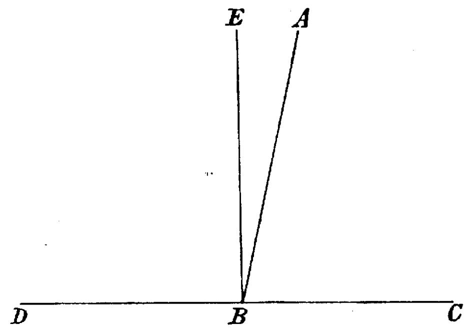
13.

Naar en ret Linie er oprejst paa en anden ret Linie, saa at der dannes Vinkler, ville de enten være to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette.

Lad nemlig en vilkaarlig ret Linie AB være oprejst paa den rette Linie CD og danne Vinklerne CBA og ABD. Jeg siger da, at Vinklerne CBA og ABD enten ere to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette.

Hvis $\angle$ CBA er lig $\angle$ ABD, ere de to rette Vinkler. Men, hvis ikke, saa lad der fra Punkt B være oprejst BE vinkelret paa CD.

Da ere Vinklerne CBE og EBD to rette Vinkler. Nu er $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$; lad $\angle$ EBD være lagt til dem begge, saa er $\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$. Endvidere er $\angle DBA = \angle DBE + \angle EBA$; lad $\angle$ ABC være lagt til dem begge, saa er $\angle DBA + \angle ABC = \angle DBE + \angle EBA + \angle ABC$. Men det blev ogsaa bevist, at $\angle CBE + \angle EBD$ er lig de samme tre Vinkler. Men Størrelser, som ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er $\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle ABC$. Men Vinklerne CBE og EBD ere to rette Vinkler. Altsaa er $\angle DBA + \angle ABC$ lig to rette.



Altsaa: naar en ret Linie er oprejst paa en anden ret Linie, saa at der dannes Vinkler, ville de enten være to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette; h. s. b.

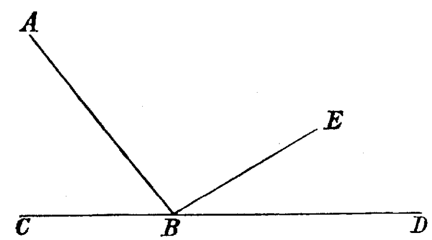
14.

Naar to rette Linier ere tegnede ud fra et Punkt paa en ret Linie til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier ligge i Forlængelse af hinanden.

Lad nemlig de to rette Linier BC og BD være tegnede ud fra et Punkt B paa en ret Linie AB til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette. Jeg siger da, at BD ligger i Forlængelse af CB.

Thi hvis BD ikke ligger i Forlængelse af CB, saa lad BE ligge i Forlængelse af CB.

Da nu den rette Linie AB er oprejst paa den rette Linie CBE, saa er $\angle ABC + \angle ABE$ lig to rette. Men $\angle ABC + \angle ABD$ er ogsaa lig to rette. Altsaa er $\angle$ CBA



+ ∠ ABE = ∠ CBA + ∠ ABD. Lad den fælles Vinkel CBA være trukken fra, saa er Resten ∠ ABE lig Resten ∠ ABD, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa ligger BE ikke i Forlængelse af CB. Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at heller ikke nogen anden gør det, undtagen BD. Altsaa ligger BD i Forlængelse af CB.

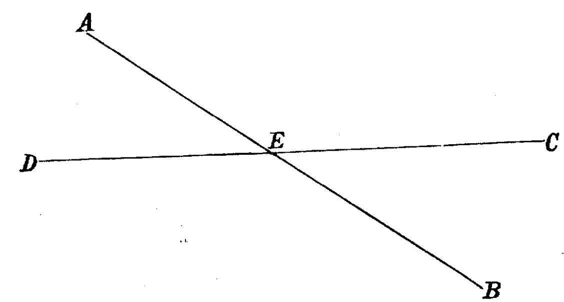
Altsaa: naar to rette Linier ere tegnede ud fra et Punkt paa en ret Linie til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier ligge i Forlængelse af hinanden; h. s. b.

15.

Naar to rette Linier skære hinanden, ere Topvinklerne ligestore.

Lad nemlig de rette Linier AB og CD skære hinanden i Punkt E. Jeg siger da: ∠ AEC = ∠ DEB, og ∠ CEB = ∠ AED.

Thi da den rette Linie AE er oprejst paa den rette Linie CD og danner Vinklerne CEA og AED, saa er ∠ CEA + ∠ AED lig to rette. Da endvidere den rette Linie DE er oprejst paa den rette Linie AB og danner Vinklerne AED og DEB, saa er ∠ AED + ∠ DEB lig to rette. Men det blev ogsaa bevist, at ∠ CEA + ∠ AED er lig to rette. Altsaa er ∠ CEA + ∠ AED = ∠ AED + ∠ DEB. Lad den fælles Vinkel AED være trukken fra, saa er Resten ∠ CEA lig Resten ∠ BED. Paa samme Maade ville vi



ogsaa kunne bevise, at Vinklerne CEB og DEA ere ligestore.

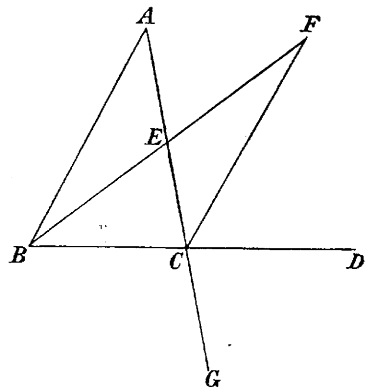
Altsaa: naar to rette Linier skære hinanden, ere Topvinklerne ligestore; h. s. b.

16.

I enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler.

Lad ABC være en Trekant, og lad en af dens Sider BC være forlænget til D. Jeg siger da, at den udvendige Vinkel ACD er større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler CBA og BAC.

Lad AC være halveret i E, lad den rette Linie BE være dragen og forlænget til F, lad EF være afsat lig BE, lad FC være dragen, og lad AC være fortsat til G.



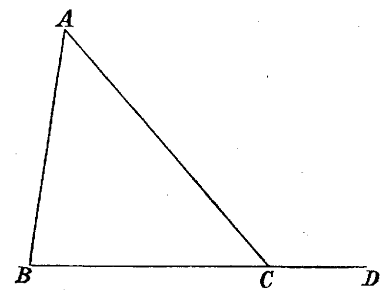
Da nu AE er lig EC, og BE er lig EF, saa ere de to Sider AE og EB parvis lig de to Sider CE og EF; og ∠ AEB er lig ∠ FEC, thi de ere Topvinkler; altsaa er Grundlinie AB lig Grundlinie FC; △ ABE er lig △ FCE; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ere parvis lig de øvrige Vinkler. Altsaa er ∠ BAE = ∠ ECF. Men ∠ ECD er større end ∠ ECF. Altsaa er ∠ ACD større end ∠ BAE. Paa samme Maade vil man ved at halvere BC kunne bevise, at ∠ BCG, det vil sige ∠ ACD, er større end ∠ ABC.

Altsaa: i enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler; h. s. b.

17.

I enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette.

Lad ABC være en Trekant. Jeg siger da, at i △ ABC ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette.



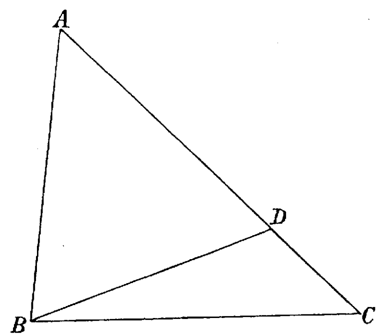
Lad nemlig BC være forlænget til D. Da nu ∠ ACD er en udvendig Vinkel til △ ABC, er den større end den indvendige og modstaaende Vinkel ABC. Lad ∠ ACB være lagt til dem begge, saa er ∠ ACD + ∠ ACB større end ∠ ABC + ∠ BCA. Men ∠ ACD + ∠ ACB er lig to rette. Altsaa er ∠ ABC + ∠ BCA mindre end to rette. Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at $\angle$ BAC + $\angle$ ACB er mindre end to rette, og ligesaa $\angle$ CAB + $\angle$ ABC.

Altsaa: i enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette; h. s. b.

18.

I enhver Trekant ligger der overfor en større Side en større Vinkel.

Lad nemlig ABC være en Trekant, hvor Side AC er større end Side AB. Jeg siger da, at $\angle$ ABC er større end $\angle$ BCA.



Thi da AC er større end AB, saa lad AD være afsat lig AB, og lad BD være dragen.

Da nu $\angle$ ADB er en udvendig Vinkel til $\triangle$ BCD, er den større end den indvendige og modstaaende Vinkel DCB. Men $\angle$ ADB er lig $\angle$ ABD, da Side AB er lig Side AD. Altsaa er $\angle$ ABD større end $\angle$ ACB. Altsaa er $\angle$ ABC meget større end $\angle$ ACB.

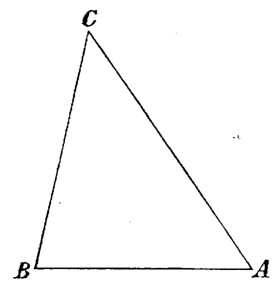
Altsaa: i enhver Trekant ligger der overfor en større Side en større Vinkel; h. s. b.

19.

I enhver Trekant ligger der overfor en større Vinkel en større Side.

Lad ABC være en Trekant, hvor $\angle$ ABC er større end $\angle$ BCA. Jeg siger da, at Side AC er større end Side AB.

Thi, hvis ikke, er AC enten lig med eller mindre end AB. AC er nu ikke lig AB; thi i saa Fald vilde $\angle$ ABC være lig $\angle$ ACB, men det er den ikke. Altsaa er AC ikke lig AB. Men AC er heller ikke mindre end AB; thi i saa Fald vilde $\angle$ ABC være mindre end $\angle$ ACB, men det er den ikke.



Altsaa er AC ikke mindre end AB. Og det blev bevist, at den heller ikke er lig AB. Altsaa er AC større end AB.

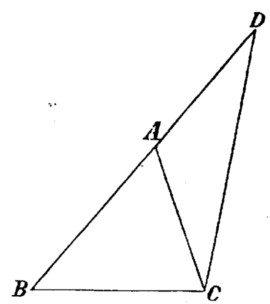
Altsaa: i enhver Trekant ligger der overfor en større Vinkel en større Side; h. s. b.

20.

I enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Sider tilsammen større end den tredje.

Lad nemlig ABC være en Trekant. Jeg siger da, at i $\triangle$ ABC ere to hvilkesomhelst Sider tilsammen større end den tredje, BA + AC større end BC, AB + BC større end AC, BC + CA større end AB.

Lad nemlig BA være fortsat til Punkt D, lad AD være afsat lig CA, og lad DC være dragen.



Da nu DA er lig AC, er $\angle$ ADC = $\angle$ ACD. Altsaa er $\angle$ BCD større end $\angle$ ADC. Og da DCB er en Trekant, hvor $\angle$ BCD er større end $\angle$ BDC, og der overfor en større Vinkel ligger en større Side, saa er DB større end BC. Men DA er lig AC. Altsaa er BA + AC større end BC. Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at AB + BC er større end AC, og at BC + CA er større end AB.

Altsaa: i enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Sider tilsammen større end den tredje; h. s. b.

21.

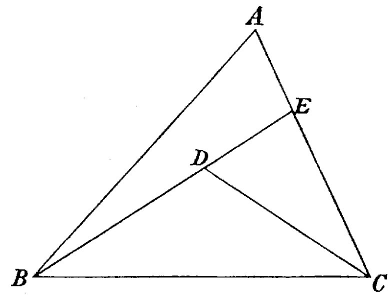
Naar der i en Trekant fra Endepunkterne af en af Siderne er konstrueret to rette Linier indenfor Trekanten, saa ville de to rette Linier tilsammen være mindre end Trekantens to andre Sider tilsammen, men indeslutte en større Vinkel.

Lad der nemlig i $\triangle$ ABC fra Endepunkterne B og C af en af Siderne BC være konstrueret to rette Linier BD og DC indenfor Trekanten. Jeg siger da, at BD og DC tilsammen ere mindre end Trekantens to andre Sider BA og AC tilsammen, men at den Vinkel, de indeslutte, $\angle$ BDC er større end $\angle$ BAC.

Lad nemlig BD være fortsat til E.

Da nu i enhver Trekant de to Sider tilsammen ere større end den tredje, saa er i $\triangle$ ABE AB + AE større end BE. Lad EC være lagt til dem begge, saa er BA + AC større end BE + EC. Endvidere er i $\triangle$ CED CE + ED større end CD. Lad DB være lagt til dem begge, saa er CE + EB større end CD + DB. Men det blev bevist, at BA + AC er større end BE + EC. Altsaa er BA + AC meget større end BD + DC.

Da endvidere i enhver Trekant en udvendig Vinkel er større end enhver af de indvendige og modstaaende, saa er △ CDE's udvendige Vinkel BDC større end ∠ CED. Af samme Grund er altsaa ogsaa △ ABE's udvendige Vinkel CEB større end ∠ BAC. Men det blev bevist, at ∠ BDC er større end ∠ CEB. Altsaa er ∠ BDC meget større end ∠ BAC.

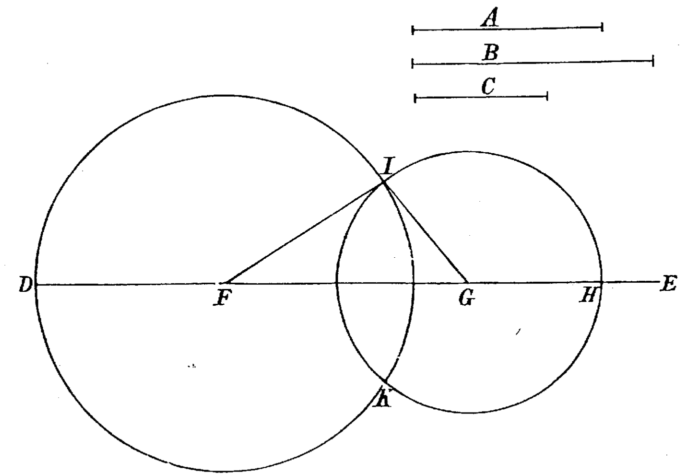


Altsaa: naar der i en Trekant fra Endepunkterne af en af Siderne er konstrueret to rette Linier indenfor Trekanten, saa ville de to rette Linier tilsammen være mindre end Trekantens to andre Sider tilsammen, men indeslutte en større Vinkel; h. s. b.

22.

At konstruere en Trekant af tre rette Linier, lig tre givne rette Linier; dog maa to hvilkesomhelst tilsammen være større end den tredje.

Lad A, B og C være de tre givne rette Linier, og lad to hvilkesomhelst af dem tilsammen være større end den tredje, A + B større end C, A + C større end B og B + C større end A. Man skal da konstruere en Trekant af rette Linier lig A, B og C.



Lad en ret Linie DE være afsat begrænset i D, men ubegrænset henimod E, lad der være afsat DF = A, FG = B, GH = C, lad Cirkel DIK være tegnet med F som Centrum og FD som Radius, lad endvidere Cirkel KIH være tegnet med G som Centrum og GH som Radius, og lad IF og IG være dragne. Jeg siger da, at

△ IFG er konstrueret af tre rette Linier lig A, B og C.

Thi da Punkt F er Centrum i Cirkel DIK, er FD = FI. Men FD er lig A. Altsaa er FI ogsaa lig A. Da endvidere Punkt G er Centrum i Cirkel KIH, er GH = GI. Men GH er lig C Altsaa er IG ogsaa lig C. Og FG er lig B. Altsaa ere de tre rette Linier IF, FG og GI lig de tre rette Linier A, B og C.

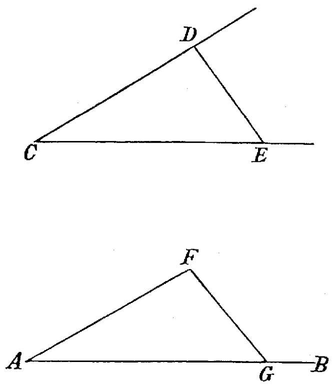
Altsaa er △ IFG tegnet af tre rette Linier IF, FG og GI lig de tre givne rette Linier A, B og C; h. s. g.

23.

Ved en given ret Linie og et givet Punkt paa den at konstruere en retlinet Vinkel lig en given retlinet Vinkel.

Lad AB være den givne rette Linie, A det givne Punkt paa den og ∠ DCE den givne retlinede Vinkel. Man skal da ved den givne rette Linie AB og det givne Punkt A paa den konstruere en retlinet Vinkel lig den givne retlinede Vinkel DCE.

Lad der være taget vilkaarlige Punkter D og E, henholdsvis paa CD og CE, lad DE være dragen, og lad △ AFG være konstrueret af tre rette Linier, som ere lig de tre rette



Linier CD, DE og CE, saa at CD = AF, CE = AG og DE = FG.

Da nu de to Sider DC og CE ere parvis lig de to Sider FA og AG, og Grundlinie DE er lig Grundlinie FG, saa er ∠ DCE = ∠ FAG.

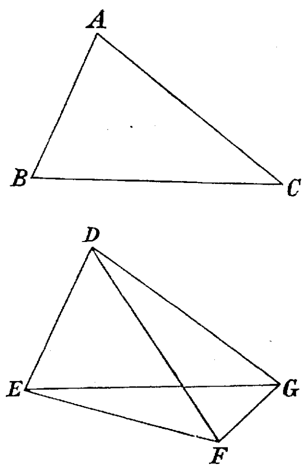
Altsaa er der ved den givne rette Linie AB og det givne Punkt A paa den konstrueret den retlinede Vinkel FAG lig den givne retlinede Vinkel DCE; h. s. g.

24.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Vinkel mellem Siderne end den anden, saa vil den ogsaa have en større Grundlinie end den anden.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig AB = DE og AC = DF, men lad Vinkelen ved A være større end Vinkelen ved D. Jeg siger da, at Grundlinie BC er større end Grundlinie EF.

Thi da ∠ BAC er større end ∠ EDF, saa lad der ved den rette Linie DE og Punkt D paa den være konstrueret ∠ EDG = ∠ BAC, lad DG være afsat lig AC eller DF, og lad EG og FG være dragne.



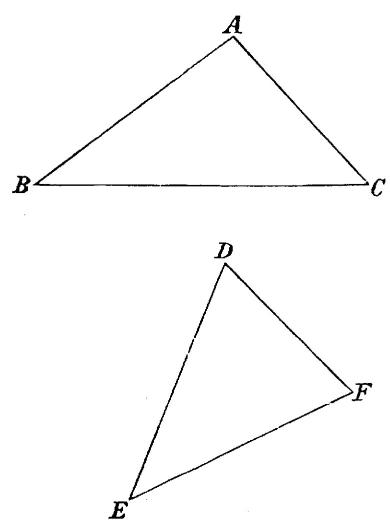
Da nu AB er lig DE, og AC er lig DG, saa ere de to Sider BA og AC parvis lig de to Sider ED og DG; og ∠ BAC er lig ∠ EDG; altsaa er Grundlinie BC lig Grundlinie EG. Da endvidere DF er lig DG, er ∠ DGF = ∠ DFG. Altsaa er ∠ DFG større end ∠ EGF. Altsaa er ∠ EFG meget større end ∠ EGF. Da nu EFG er en Trekant, hvor ∠ EFG er større end ∠ EGF, og der overfor en større Vinkel ligger en større Side, saa er Side EG større end Side EF. Men EG er lig BC. Altsaa er ogsaa BC større end EF.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Vinkel mellem Siderne end den anden, saa vil den ogsaa have en større Grundlinie end den anden; h. s. b.

25.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Grundlinie end den anden, saa vil den ogsaa have en større Vinkel mellem Siderne end den anden.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig AB = DE og AC = DF, men lad Grundlinie BC være større end Grundlinie EF. Jeg siger da, at ∠ BAC er større end ∠ EDF.



Thi, hvis ikke, saa er ∠ BAC enten lig med eller mindre end ∠ EDF. ∠ BAC er nu ikke lig ∠ EDF; thi i saa Fald vilde

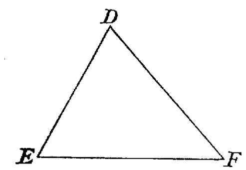
Grundlinie BC være lig Grundlinie EF, men det er den ikke. Altsaa er $\angle$ BAC ikke lig $\angle$ EDF. Men $\angle$ BAC er heller ikke mindre end $\angle$ EDF; thi i saa Fald vilde Grundlinie BC være mindre end Grundlinie EF, men det er den ikke. Altsaa er $\angle$ BAC ikke mindre end $\angle$ EDF. Og det blev bevist, at den heller ikke er lig $\angle$ EDF. Altsaa er $\angle$ BAC større end $\angle$ EDF.

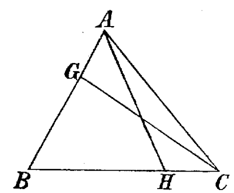
Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Grundlinie end den anden, saa vil den ogsaa have en større Vinkel mellem Siderne end den anden; h. s. b.

26.

Naar to Trekanter have to Vinkler parvis ligestore og et Par Sider ligestore, enten dem, der ligge mellem de parvis ligestore Vinkler, eller dem, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, saa ville de ogsaa have de andre Sider parvis ligestore og det tredje Par Vinkler ligestore.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor Vinklerne ABC og BCA parvis ere lig Vinklerne DEF og EFD, nemlig $\angle$ ABC $=$ $\angle$ DEF og $\angle$ BCA $=$ $\angle$ EFD, og lad dem desuden have et Par Sider ligestore, først dem, der ligge mellem de ligestore Vinkler, nemlig BC $=$ EF. Jeg siger da, at de ogsaa ville have de øvrige Sider parvis ligestore, nemlig AB $=$ DE og AC $=$ DF, og det tredje Par Vinkler ligestore, nemlig $\angle$ BAC $=$ $\angle$ EDF.





Thi hvis AB og DE ere uligestore, er en af dem størst. Lad AB være størst, lad BG være afsat lig DE og lad GC være dragen.

Da nu BG er lig DE, og BC er lig EF, saa ere de to Sider BG og BC parvis lig de to Sider ED og EF; og $\angle$ GBC er lig $\angle$ DEF; altsaa er Grundlinie GC lig Grundlinie DF; $\triangle$ GBC er lig $\triangle$ DEF; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være ligestore. Altsaa er $\angle$ GCB $=$ $\angle$ DFE. Men det er givet, at $\angle$ DFE er lig $\angle$ BCA. Altsaa er $\angle$ BCG $=$ $\angle$ BCA, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa ere AB og DE ikke uligestore. Altsaa er AB $=$ DE. Desuden er BC $=$ EF. Altsaa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider DE og EF; og $\angle$ ABC er lig ∠ DEF; altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DF, og den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Men lad nu de Sider, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, være ligestore, f. Ex. AB = DE; saa siger jeg atter, at de øvrige Sider ogsaa ville være ligestore, AC = DF og BC = EF, og tillige, at den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Thi hvis BC og EF ere uligestore, er en af dem størst. Lad om muligt BC være størst, lad BH være afsat lig EF, og lad AH være dragen.

Da nu BH er lig EF, og AB er lig DE, saa ere de to Sider AB og BH parvis lig de to Sider DE og EF; og de indeslutte ligestore Vinkler; altsaa er Grundlinie AH lig Grundlinie DF; △ ABH er lig △ DEF; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være ligestore. Altsaa er ∠ BHA = ∠ EFD. Men ∠ EFD er lig ∠ BCA. Altsaa er △ AHC's udvendige Vinkel BHA lig den indvendige og modstaaende Vinkel BCA; hvilket er umuligt. Altsaa ere BC og EF ikke uligestore. Altsaa er BC = EF. Desuden er AB = DE. Altsaa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider DE og EF; og de indeslutte ligestore Vinkler; altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DF; △ ABC er lig △ DEF; og den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Altsaa: naar to Trekanter have to Vinkler parvis ligestore og et Par Sider ligestore, enten dem, der ligge mellem de parvis ligestore Vinkler, eller dem, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, saa ville de ogsaa have de andre Sider parvis ligestore, og det tredje Par Vinkler ligestore; h. s. b.

27.

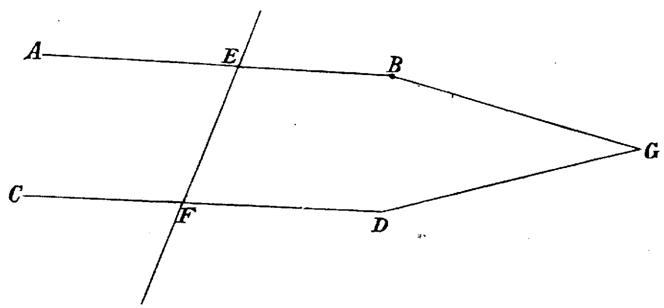
Naar en ret Linie skærer to rette Linier, og Vekselvinklerne ere ligestore, ville de rette Linier være parallele.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de to rette Linier AB og CD, og lad Vekselvinklerne AEF og EFD være ligestore. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Thi, hvis ikke, saa ville AB og CD, naar de forlænges, mødes enten paa den Side, hvor B og D ligge, eller paa den Side, hvor A og C ligge. Lad dem være forlængede og mødes paa den Side, hvor B og D ligge, i G.

Saa er △ GEF's udvendige Vinkel AEF lig den indvendige og modstaaende Vinkel EFG;

hvilket er umuligt. Altsaa ville AB og CD, naar de forlænges, ikke mødes paa den Side, hvor B og D ligge. Paa samme Maade vil det kunne bevises, at de heller ikke gøre det paa den Side, hvor A og C ligge. Men Linier, som ikke mødes til nogen af Siderne, ere parallele. Altsaa er AB parallel med CD.



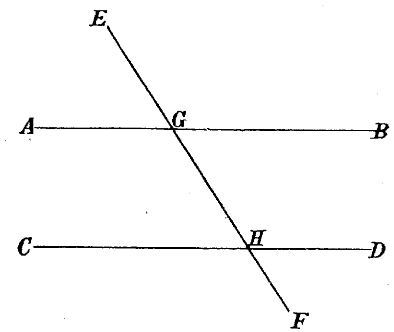
Altsaa: naar en ret Linie skærer to rette Linier, og Vekselvinklerne ere ligestore, ville de rette Linier være parallele; h. s. b.

28.

Naar en ret Linie skærer to rette Linier, og den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende paa samme Side, eller de indvendige Vinkler tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallele.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de to rette Linier AB og CD, og lad den udvendige Vinkel EGB være lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, eller de indvendige Vinkler paa samme Side BGH og GHD tilsammen være lig to rette. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Thi da $\angle$ EGB er lig $\angle$ GHD, og $\angle$ EGB er lig $\angle$ AGH, saa er $\angle$ AGH $=$ $\angle$ GHD. Og de ere Vekselvinkler. Altsaa er AB parallel med CD.



Da endvidere $\angle$ BGH $+$ $\angle$ GHD er lig to rette, og $\angle$ AGH $+$ $\angle$ BGH ogsaa er lig to rette, saa er $\angle$ BGH $+$ $\angle$ GHD $=$ $\angle$ AGH $+$ $\angle$ BGH. Lad den fælles Vinkel BGH være trukken fra, saa er Resten $\angle$ AGH lig Resten $\angle$ GHD. Og de ere Vekselvinkler. Altsaa er AB parallel med CD.

Altsaa: naar en ret Linie skærer to rette Linier, og den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende paa samme Side, eller de indvendige Vinkler paa samme Side tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallele; h. s. b.

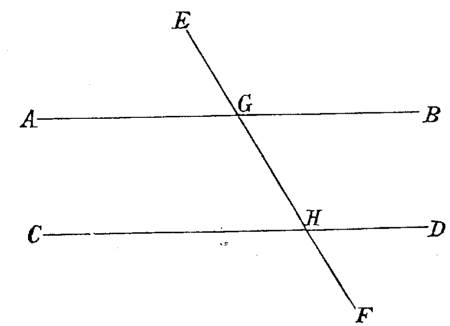
29.

Naar en ret Linie skærer parallele rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de parallele rette Linier AB og CD. Jeg siger da, at Vekselvinklerne AGH og GHD ere ligestore, at den udvendige Vinkel EGB er lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, og at de indvendige Vinkler paa samme Side BGH og GHD tilsammen ere lig to rette.

Thi hvis $\angle$ AGH og $\angle$ GHD ere uligestore, er en af dem størst. Lad $\angle$ AGH være størst, og lad $\angle$ BGH være lagt til dem begge, saa er $\angle$ AGH + $\angle$ BGH større end $\angle$ BGH + $\angle$ GHD. Men $\angle$ AGH + $\angle$ BGH er lig to rette. Altsaa er $\angle$ BGH + $\angle$ GHD mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de forlænges ubegrænset fra Vinkler, der tilsammen ere mindre end to rette. Altsaa ville AB og

CD mødes, naar de forlænges ubegrænset. Men de mødes ikke, fordi det er givet, at de ere parallele. Altsaa er $\angle$ AGH og $\angle$ GHD ikke uligestore. Altsaa er $\angle$ AGH = $\angle$ GHD. Men $\angle$ AGH er lig $\angle$ EGB. Altsaa er $\angle$ EGB = $\angle$ GHD. Lad nu $\angle$ BGH være lagt til dem begge, saa er $\angle$ EGB + $\angle$ BGH = $\angle$ BGH + $\angle$ GHD. Men $\angle$ EGB + $\angle$ BGH er lig to rette. Altsaa er ogsaa $\angle$ BGH + $\angle$ GHD lig to rette.



Altsaa: naar en ret Linie skærer parallele rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette; h. s. b.

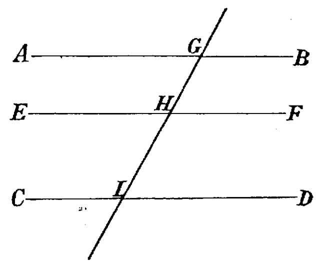
30.

Rette Linier, der ere parallele med den samme rette Linie, ere indbyrdes parallele.

Lad begge de rette Linier AB og CD være parallele med EF. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Lad nemlig den rette Linie GI skære dem.

Da den rette Linie GI har skaaret de parallele rette Linier AB og EF, saa er ∠ AGI = ∠ GHF. Da endvidere den rette Linie GI har skaaret de parallele rette Linier EF og CD, saa er ∠ GHF = ∠ GID.



Men det blev ogsaa bevist, at ∠ AGI er lig ∠ GHF. Altsaa er ∠ AGI = ∠ GID. Og de ere Vekselvinkler. Altsaa er AB parallel med CD.

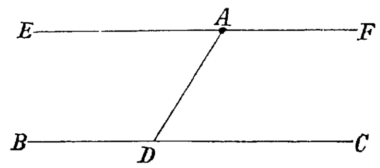
Altsaa: rette Linier, der ere parallele med den samme rette Linie, ere indbyrdes parallele; h. s. b.

31.

Gennem et givet Punkt at trække en ret Linie, parallel med en given ret Linie.

Lad A være det givne Punkt og BC den givne rette Linie. Man skal da gennem Punkt A trække en ret Linie parallel med den rette Linie BC.

Lad der paa BC være taget et vilkaarligt Punkt D, og lad AD være dragen; lad der ved den rette Linie AD og Punktet A paa den være konstrueret ∠ DAE = ∠ ADC, og lad den rette Linie AF være afsat i Forlængelse af EA.



Da nu den rette Linie AD har skaaret de to rette Linier BC og EF, og Vekselvinklerne EAD og ADC ere ligestore, saa er EAF parallel med BC.

Altsaa er der gennem det givne Punkt A trukket den rette Linie EAF parallel med den givne rette Linie BC; h. s. g.

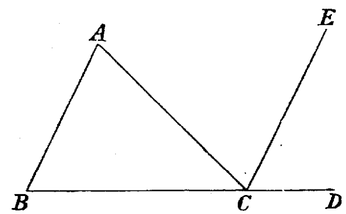
32.

I enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel lig de to indvendige og modstaaende tilsammen, og de tre Vinkler inde i Trekanten ere tilsammen lig to rette.

Lad ABC være en Trekant, og lad dens ene Side BC være forlænget til D. Jeg siger da, at den udvendige Vinkel ACD er lig de to indvendige og modstaaende CAB og ABC tilsammen, og at de tre Vinkler inde i Trekanten ABC, BCA og CAB tilsammen ere lig to rette.

Lad nemlig CE være trukken gennem Punkt C parallel med den rette Linie AB.

Da nu AB er parallel med CE, og den rette Linie AC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne BAC og ACE ligestore. Da paa den anden Side AB er parallel med CE, og den rette Linie BD har skaaret dem, er den udvendige Vinkel ECD lig den indvendige og modstaaende Vinkel ABC.



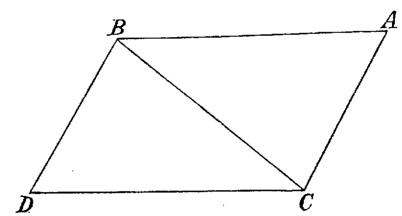
Men det blev ogsaa bevist, at ∠ ACE er lig ∠ BAC. Altsaa er hele ∠ ACD lig de to indvendige og modstaaende Vinkler BAC + ABC. Lad nu ∠ ACB være lagt til dem begge, saa er altsaa ∠ ACD + ∠ ACB = ∠ ABC + ∠ BCA + ∠ CAB. Men ∠ ACD + ∠ ACB er lig to rette; altsaa er ogsaa ∠ ABC + ∠ BCA + ∠ CAB lig to rette.

Altsaa: i enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel lig de to indvendige og modstaaende tilsammen, og de tre Vinkler inde i Trekanten ere tilsammen lig to rette; h. s. b.

33.

Rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallele rette Linier, ere selv ligestore og parallele.

Lad AB og CD være ligestore og parallele, og lad de rette Linier AC og BD forbinde de til hinanden svarende Endepunkter. Jeg siger da, at AC og BD ere ligestore og parallele.



Lad BC være dragen.

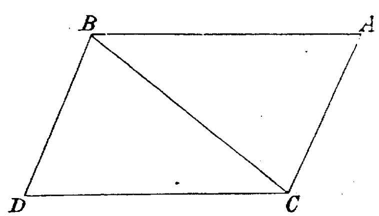
Da nu AB er parallel med CD, og BC har skaaret dem, saa ere Vekselvinklerne ABC og BCD ligestore. Og da AB er lig CD, og BC er fælles, saa ere de to Sider AB og BC lig de to Sider BC og CD. Desuden er ∠ ABC = ∠ BCD. Altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie BD; △ ABC er lig △ BCD; og de øvige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore. Altsaa er ∠ ACB = ∠ CBD. Da nu den rette Linie BC skærer de to rette Linier AC og BD, og Vekselvinklerne ere ligestore, saa er AC parallel med BD. Men det blev ogsaa bevist, at AC er lig BD.

Altsaa: rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallele rette Linier, ere selv ligestore og parallele; h. s. b.

34.

I et Parallelogram ere de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore, og Diagonalen halverer Parallelogrammet.

Lad ACDB være et Parallelogram og BC dets Diagonal. Jeg siger da, at i ▱ ACDB ere de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore, og at Diagonalen BC halverer det.



Thi da AB er parallel med CD, og den rette Linie BC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne ABC og BCD ligestore. Da endvidere AC er parallel med BD, og BC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne ACB og CBD ligestore. Altsaa ere ABC og BCD to Trekanter, hvor de to Vinkler ABC og BCA ere parvis lig de to Vinkler BCD og CBD, og hvor et Par Sider ere ligestore, nemlig Fællessiden BC, som ligger mellem de ligestore Vinkler. Altsaa ville de ogsaa have de øvrige Sider parvis ligestore og det tredje Par Vinkler ligestore. Altsaa er AB $=$ CD, AC $=$ BD og $\angle$ BAC $= \angle$ CDB. Da nu $\angle$ ABC er lig $\angle$ BCD, og $\angle$ CBD er lig $\angle$ ACB, saa er hele $\angle$ ABD lig hele $\angle$ ACD. Men det blev ogsaa bevist, at $\angle$ BAC er lig $\angle$ CDB.

Altsaa: i et Parallelogram ere de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore.

Jeg siger endvidere, at Diagonalen halverer Parallelogrammet. Thi da AB er lig CD, og BC er fælles, saa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider CD og BC; og $\angle$ ABC er lig $\angle$ BCD. Altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DB, og $\triangle$ ABC er lig $\triangle$ BCD.

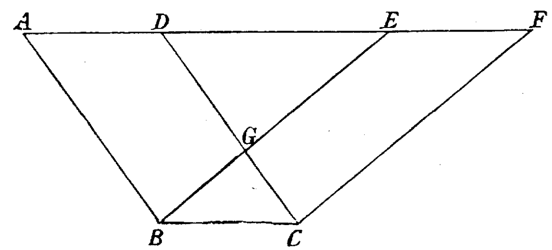
Altsaa: Diagonalen BC halverer ▱ ABCD; h. s. b.

35.

Parallelogrammer paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABCD og EBCF være Parallelogrammer paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler AF og BC. Jeg siger da: ▱ABCD = ▱ EBCF.

Thi da ABCD er et Parallelogram, er AD = BC. Af samme Grund er ogsaa EF = BC. Følgelig er AD = EF. Og DE er fælles. Altsaa er hele AE lig hele DF. Desuden er AB = DC. Altsaa ere de to Sider EA og AB



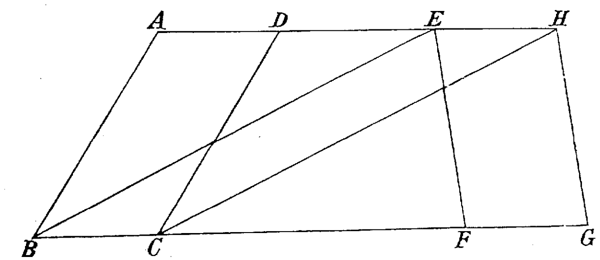
parvis lig de to Sider FD og DC; og ∠ FDC er lig ∠ EAB, nemlig den udvendige lig den indvendige; altsaa er Grundlinie EB lig Grundlinie FC; og △ EAB vil være lig △ DFC. Lad den fælles DGE være trukken fra, saa er Resten Firkant ABGD lig Resten Firkant EGCF. Lad △ GBC være lagt til dem begge, saa er hele ▱ ABCD lig hele ▱ EBCF.

Altsaa: Parallelogrammer paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

36.

Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABCD og EFGH være Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier BC og FG



og mellem de samme Paralleler AH og BG. Jeg siger da: ▱ ABCD = ▱ EFGH.

Lad nemlig BE og CH være dragne.

Da nu BC er lig FG, men FG er lig EH, saa er ogsaa BC = EH. Desuden ere de parallele, og EB og HC forbinde dem. Men rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallele rette Linier, ere ligestore og parallele. Altsaa er EBCH et Parallelogram. Og det er lig ▱ ABCD; thi de have samme Grundlinie BC og ligge mellem de samme Paralleler BC og AH. Af samme Grund er ogsaa ▱ EFGH = ▱ EBCH. Følgelig er ▱ ABCD = ▱ EFGH.

Altsaa: Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

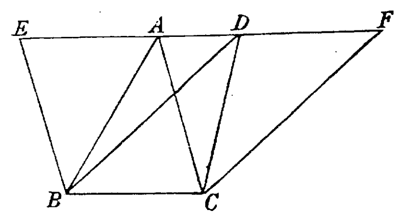
37.

Trekanter paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABC og DBC være Trekanter paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler AD og BC. Jeg siger da: △ ABC = △ DBC.

Lad AD være forlænget til begge Sider til E og F, lad BE være trukken gennem B parallel med CA, og lad CF være trukken gennem C parallel med BD.

Saa ere EBCA og DBCF Parallelogrammer; og de ere ligestore, thi de ligge paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler BC og EF. Men △ ABC er Halvdelen af ▱EBCA, thi Diagonal AB halverer det; og △ DBC er Halvdelen af ▱ DBCF, thi Diagonal DC halverer det; altsaa er △ ABC = △ DBC.



Altsaa: Trekanter paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

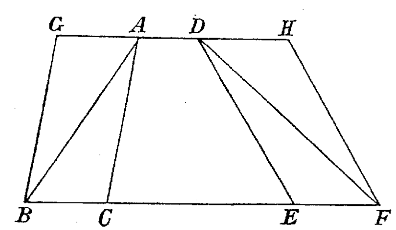
38.

Trekanter paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABC og DEF være Trekanter paa ligestore Grundlinier BC og EF og mellem de samme Paralleler BF og AD. Jeg siger da: △ ABC = △ DEF.

Lad nemlig AD være forlænget til begge Sider til G og H, lad BG være trukken gennem B parallel med CA, og lad FH være trukken gennem F parallel med ED.

Saa ere baade GBCA og DEFH Parallelogrammer; og ▱ GBCA er lig ▱ DEFH; thi de ligge paa ligestore Grundlinier BC og EF og mellem de samme Paralleler BF og GH. Men △ ABC er Halvdelen af ▱ GBCA, thi Dia-



gonal AB halverer det; og △ FED er Halvdelen af ▱ DEFH, thi Diagonal DF halverer det; altsaa er △ ABC = △ DEF.

Altsaa: Trekanter paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

39.

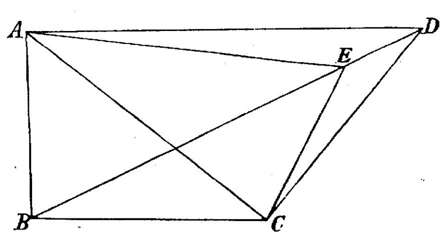
Ligestore Trekanter paa samme Grundlinie og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler.

Lad ABC og DBC være ligestore Trekanter paa samme Grundlinie BC og paa samme Side af BC. Jeg siger da, at de ogsaa ligge mellem de samme Paralleler.

Lad nemlig AD være dragen. Jeg siger da, at AD er parallel med BC.

Thi, hvis ikke, saa lad AE være trukken gennem Punkt A parallel med den rette Linie BC, og lad EC være dragen.

Saa er △ ABC = △ EBC; thi de ligge paa samme Grundlinie BC og mellem de samme



Paralleler. Men △ ABC er ogsaa lig △ DBC. Altsaa er △ DBC = △ EBC, en større lig en mindre; hvilket er umuligt. Altsaa er AE ikke parallel med BC. Paa samme Maade ville vi kunne bevise, at heller ikke nogen anden er det undtagen AD. Altsaa er AD parallel med BC.

Altsaa: ligestore Trekanter paa samme Grundlinie og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler; h. s. b.

40.

Ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler.

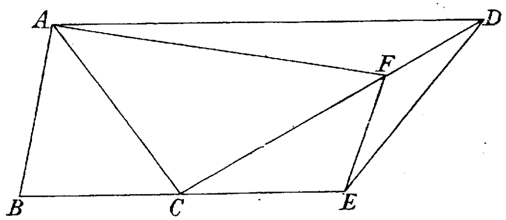
Lad ABC og DCE være ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier BC og CE og paa samme Side. Jeg siger da, at de ogsaa ligge mellem de samme Paralleler.

Lad nemlig AD være dragen. Jeg siger da, at AD er parallel med BC.

Thi, hvis ikke, saa lad AF være trukken gennem A parallel med BE, og lad FE være dragen.

Saa er △ ABC = △ FCE; thi de ligge paa ligestore Grundlinier BC og CE og mellem de samme Paralleler BE og AF. Men △ ABC er ogsaa lig △ DCE. Altsaa er △ DCE

= △ FCE, en større lig en mindre; hvilket er umuligt. Altsaa er AF ikke parallel med BE. Paa samme Maade ville vi kunne bevise, at



heller ikke nogen anden er det undtagen AD. Altsaa er AD parallel med BE.

Altsaa: ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler; h. s. b.

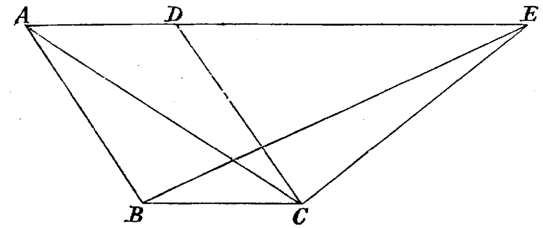
41.

Naar et Parallelogram har samme Grundlinie som en Trekant og ligger mellem de samme Paralleler, er Parallelogrammet dobbelt saa stort som Trekanten.

Lad nemlig ▱ ABCD have samme Grundlinie som △ EBC, nemlig BC, og ligge mellem de samme Paralleler BC og AE. Jeg siger da: ▱ ABCD = 2 △ BEC.

Lad AC være dragen.

Saa er △ ABC = △ EBC; thi de ligge paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler BC og AE. Men ▱ABCD er lig 2 △ ABC;



thi Diagonal AC halverer det. Følgelig er ogsaa ▱ ABCD = 2 △ EBC.

Altsaa: naar et Parallelogram har samme Grundlinie som en Trekant og ligger mellem de samme Paralleler, er Parallelogrammet dobbelt saa stort som Trekanten; h. s. b.

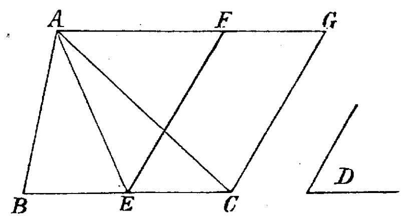
42.

At konstruere et Parallelogram lig en given Trekant og med en given retlinet Vinkel.

Lad ABC være den givne Trekant og D den givne retlinede Vinkel. Man skal da konstruere et Parallelogram lig △ ABC og med den retlinede Vinkel D.

Lad BC være halveret i E, lad AE være dragen, lad ∠ CEF = ∠ D være konstrueret ved den rette Linie EC og Punkt E paa den, lad AG være trukken gennem A parallel med EC, og lad CG være trukken gennem C parallel med EF.

Saa er FECG et Parallelogram. Da nu BE er lig EC, er $\triangle$ ABE = $\triangle$ AEC; thi de ligge paa ligestore Grundlinier BE og EC og mellem de samme Paralleler BC og AG. Altsaa er $\triangle$ ABC = 2 $\triangle$ AEC. Men ▱ FECG er ogsaa lig 2 $\triangle$ AEC; thi de have samme Grundlinie og ligge mellem de samme Paralleler. Altsaa er ▱ FECG = $\triangle$ ABC. Og det har Vinkelen CEF lig den givne Vinkel D.



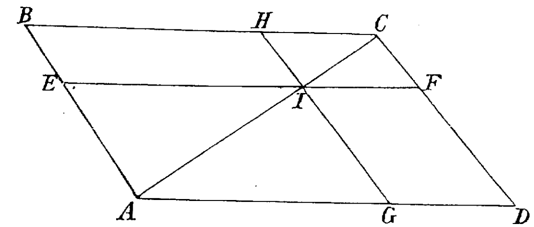
Altsaa er der konstrueret Parallelogrammet FECG lig den givne Trekant ABC og med $\angle$ CEF, som er lig D; h. s. g.

43.

I ethvert Parallelogram ere Udfyldningsfigurerne til Parallelogrammerne omkring Diagonalen ligestore.

Lad ABCD være et Parallelogram og AC dets Diagonal, lad EG og FH være Parallelogrammer omkring AC, og BI og ID de saakaldte Udfyldningsfigurer. Jeg siger da, at Udfyldningsfigur BI er lig Udfyldningsfigur ID.

Thi da ABCD er et Parallelogram og AC dets Diagonal, er $\triangle$ ABC = $\triangle$ ACD. Da endvidere EG er et Parallelogram, og AI dets Diagonal, er $\triangle$ AEI = $\triangle$ AGI. Af samme Grund er $\triangle$ IFC = $\triangle$ IHC. Da nu $\triangle$ AEI er lig $\triangle$ AGI, og $\triangle$ IFC er lig $\triangle$ IHC, saa er $\triangle$ AEI + $\triangle$ IHC = $\triangle$ AGI + $\triangle$ IFC;



desuden er hele $\triangle$ ABC lig hele $\triangle$ ADC; altsaa er Resten Udfyldningsfigur BI lig Resten Udfyldningsfigur ID.

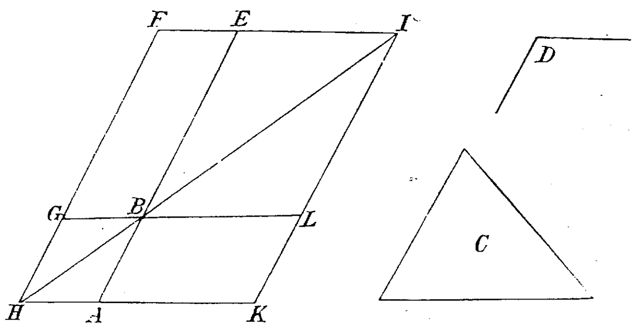
Altsaa: i ethvert Parallelogram ere Udfyldningsfigurerne til Parallelogrammerne omkring Diagonalen ligestore; h. s. b.

44.

Langs en given ret Linie at lægge et Parallelogram lig en given Trekant og med en given retlinet Vinkel.

Lad AB være den givne rette Linie, C den givne Trekant og D den givne retlinede Vinkel. Man skal da langs den givne rette Linie AB lægge et Parallelogram lig den givne Trekant C og med en Vinkel lig D.

Lad ▱ BEFG være tegnet lig △ C og med ∠ EBG, som er lig D, og lad det være lagt, saa at BE og AB ligge i Forlængelse af



hinanden, lad FG være fortsat til H, lad AH være trukken gennem A parallel med BG eller EF, og lad HB være dragen.

Da nu den rette Linie HF har skaaret Parallelerne AH og EF, saa er ∠ AHF + ∠ HFE lig to rette. Altsaa er ∠ BHG + ∠ GFE mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de forlænges ubegrænset fra Vinkler, der tilsammen ere mindre end to rette. Altsaa ville HB og FE mødes, naar de forlænges. Lad dem være forlængede og mødes i I, lad IK være trukken gennem Punkt I parallel med EA eller FH, og lad HA og GB være forlængede til Punkterne K og L. Saa er HKIF et Parallelogram, HI dets Diagonal, AG og LE Parallelogrammer omkring HI, og KB og BF de saakaldte Udfyldningsfigurer. Altsaa er KB = BF. Men BF er lig △ C. Altsaa er ogsaa KB = C. Og da ∠ GBE er lig ∠ ABL, og ∠ GBE er lig D, saa er ∠ ABL = ∠ D.

Altsaa er der langs den givne rette Linie AB lagt Parallelogrammet KB lig den givne Trekant C og med ∠ ABL, som er lig D; h. s. g.

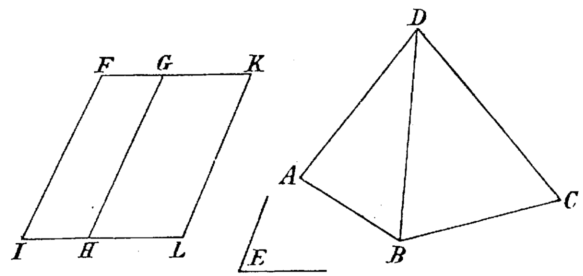
45.

At konstruere et Parallelogram lig en given retlinet Figur og med en given retlinet Vinkel.

Lad ABCD være den givne retlinede Figur og E den givne retlinede Vinkel. Man skal da konstruere et Parallelogram lig den retlinede Figur ABCD og med den givne Vinkel E.

Lad DB være dragen, og lad der være konstrueret et Parallelogram FH = △ ABD og med ∠ HIF, som er lig E, og lad der langs den rette Linie GH være lagt et Parallelogram GL = △DBC og med ∠GHL, som er lig E.

Da nu ∠E baade er lig ∠HIF og ∠GHL, saa er ∠HIF = ∠GHL. Lad ∠IHG være lagt til dem begge, saa er ∠FIH + ∠IHG = ∠IHG + ∠GHL. Men ∠FIH + ∠IHG er lig to rette. Altsaa er ∠IHG + ∠GHL ogsaa lig to rette. Da ere de to rette Linier IH og HL tegnede ud fra en ret Linie GH og



et Punkt H paa den til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette. Altsaa ligge IH og HL i Forlængelse af hinanden. Da nu den rette Linie HG har skaaret IL og FG, ere Vekselvinklerne LHG og HGF ligestore. Lad ∠HGK være lagt til dem begge, saa er ∠LHG + ∠HGK = ∠HGF + ∠HGK. Men ∠LHG + ∠HGK er lig to rette. Altsaa er ∠HGF + ∠HGK ogsaa lig to rette. Altsaa ligge FG og GK i Forlængelse af hinanden. Da nu IF er lig og parallel med HG, og HG er lig og parallel med LK, saa er IF lig og parallel med LK; og de rette Linier IL og FK forbinde deres til hinanden svarende Endepunkter; altsaa ere ogsaa IL og FK ligestore og parallele. Altsaa er IFKL et Parallelogram. Da nu △ABD er lig ▱FH, og △DBC er lig GL, saa er hele den retlinede Figur ABCD lig hele ▱IFKL.

Altsaa er der konstrueret Parallelogrammet IFKL lig den givne retlinede Figur og med ∠FIL, som er lig den givne Vinkel E; h. s. g.

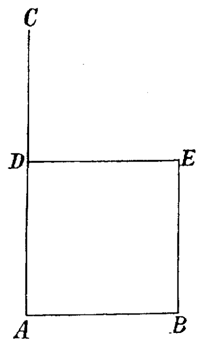
46.

At tegne et Kvadrat paa en given ret Linie.

Lad AB være den givne rette Linie. Man skal da tegne et Kvadrat paa den givne rette Linie AB.

Lad AC være oprejst fra Punkt A paa den rette Linie AB vinkelret paa AB, og lad AD være afsat lig AB; lad DE være trukken gennem Punkt D parallel med AB, og lad BE være trukken gennem Punkt B parallel med AD. Saa er ADEB et Parallelogram. Altsaa er AB =

DE og AD = BE. Men AB er lig AD; altsaa ere de fire BA, AD, DE og EB ligestore. Altsaa er ▱ ADEB ligesidet. Jeg siger da, at det ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie AD har skaaret Parallelerne AB og DE, saa er ∠ BAD + ∠ ADE lig to rette. Men ∠ BAD er ret. Altsaa er ∠ ADE ogsaa ret. Nu ere i et Parallelogram de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore. Altsaa ere ogsaa begge de modstaaende Vinkler ABE og BED rette. Altsaa er ▱ ADEB retvinklet. Desuden blev det bevist, at det er ligesidet.



Altsaa er det et Kvadrat, og det er tegnet paa den rette Linie AB; h. s. g.

47.

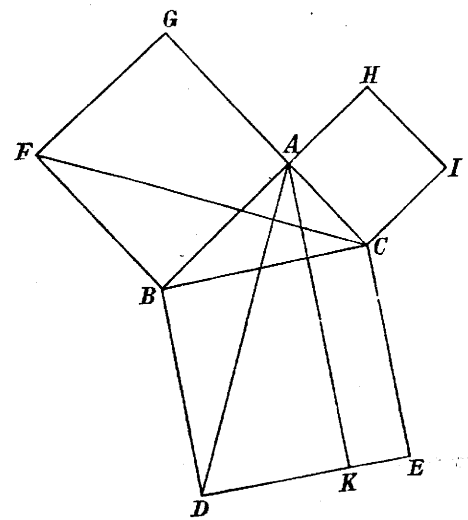
I en retvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den rette Vinkel, lig Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den rette Vinkel.

Lad ABC være en retvinklet Trekant, hvor

∠ BAC er ret. Jeg siger da, at □ BC er lig □ BA + □ AC.

Lad der nemlig paa BC være tegnet et Kvadrat BDEC og paa BA og AC Kvadraterne GB og HC, lad AK være trukken gennem A parallel med BD eller CE, og lad AD og FC være dragne.

Da nu begge Vinklerne BAC og BAG ere rette, saa ere de to rette Linier AC og AG tegnede ud fra et Punkt A paa en ret Linie AB til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden ere lig to rette. Altsaa ligge AC og AG i Forlængelse af hinanden. Af samme Grund ligge ogsaa BA og AH i Forlængelse af hinanden. Nu er ∠ DBC = ∠ FBA; thi de ere begge rette. Lad ∠ ABC være lagt til dem begge, saa er hele ∠ DBA lig hele ∠ FBC. Da nu



DB er lig BC, og FB er lig BA, saa ere de to Sider DB og BA parvis lig de to Sider CB og BF; og ∠ DBA er lig ∠ FBC; altsaa er Grundlinie AD lig Grundlinie FC; og △ ABD er lig △ FBC. Men ▱ BK er lig 2 △ ABD; thi de have samme Grundlinie BD og ligge mellem de samme Paralleler BD og AK; og Kvadrat GB er lig 2 △ FBC, thi de have samme Grundlinie FB og ligge mellem de samme Paralleler FB og GC; altsaa er ▱ BK lig Kvadrat GB. Paa samme Maade vil man ved at drage AE og BI kunne bevise, at ▱ CK er lig Kvadrat HC. Altsaa er hele Kvadrat BDEC lig Summen af de to Kvadrater GB og HC. Men BDEC er □ BC, GB og HC ere □ BA og □ AC. Altsaa er □ BC = □ BA + □ AC.

Altsaa: i en retvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den rette Vinkel, lig Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den rette Vinkel; h. s. b.

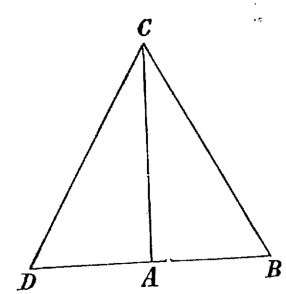
48.

Naar Kvadratet paa en af Siderne i en Trekant er lig Summen af Kvadraterne paa Trekantens to andre Sider, er den Vinkel, der indesluttes af Trekantens to andre Sider, ret.

Lad nemlig Kvadratet paa en af Siderne BC i △ ABC være lig Summen af Kvadraterne paa Siderne BA og AC. Jeg siger da, at ∠ BAC er ret.

Lad nemlig AD være oprejst fra Punkt A vinkelret paa den rette Linie AC, lad AD være afsat lig BA, og lad DC være dragen.

Da nu DA er lig AB, er ogsaa □ DA = □ AB. Lad □ AC være lagt til dem begge, saa er □ DA + □ AC = □ BA + □ AC. Men □ DC er lig □ DA + □ AC, thi ∠ DAC er ret; og □ BC er lig □ BA + □ AC, thi det er givet; altsaa er □ DC = □ BC. Følgelig er Side DC ogsaa lig Side BC. Da tillige DA er lig AB, og AC er fælles, saa ere de to Sider DA og AC lig de to Sider BA og AC; og Grundlinie DC er lig Grundlinie BC; altsaa er ∠ DAC = ∠ BAC. Men ∠ DAC er ret. Altsaa er ∠ BAC ogsaa ret.



Altsaa: naar Kvadratet paa en af Siderne i en Trekant er lig Summen af Kvadraterne paa Trekantens to andre Sider, er den Vinkel, der indesluttes af Trekantens to andre Sider, ret; h. s. b.

II.

Definitioner.

1. Ethvert Rektangel siges at indesluttes af to af de rette Linier, der indeslutte den rette Vinkel.

2. I ethvert Parallelogram kan man kalde et hvilketsomhelst af Parallelogrammerne omkring dets Diagonal sammen med de to Udfyldningsfigurer for en Gnomon.

1.

Naar man har to rette Linier, og den ene af dem er delt i et vilkaarligt Antal Stykker, er det Rektangel, der indesluttes af de to rette Linier, lig Summen af de Rektangler, der indesluttes af den udelte rette Linie og hvert af Stykkerne.