Opgave No. 1 (20 point)

a) Bevis at, hvis $m^x \equiv m^y \pmod{n}$ for nogle positive heltal x, y, m, and n, da er $m^{x+k} \equiv m^{y+k} \pmod{n}$ for alle heltal $k \geq 0$.

b) Benyt Fermat's Little Theorem til at beregne de to værdier:

$$\begin{array}{ll} 5^{74} & \pmod{7} \\ 5^{74} & \pmod{13} \end{array}$$

c) Benyt dine resultater fra del (b) og den kinesiske restklassesætning til at finde $5^{74} \pmod{91}$. (Hvis du ikke kunne løse del (b), gæt to forskellige værdier og løs del (c) med dem.)

Opgave No. 2 (20 point)

I dette problem betragter vi en mængde V, der er defineret som alle tripler $(1, a_1, a_2)$ med $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$.

a) Efterfølgende definerer vi tre operationer $\circ_1, \circ_2, \circ_3$ på mængden V. For hvilke af disse operationer $\circ_i, i \in \{1, 2, 3\}$ vil $(V, \circ_i)$ være en gruppe? Bevis i hvert tilfælde hvilke love, som er nødvendige for at være en gruppe, der er opfyldt og hvilke love der ikke er opfyldt.

   I alle tre efterfølgende definitioner forstårs addition $+$ som **addition modulo 2**, d.v.s. $1 + 1 = 0$.

   i) $(1, a_1, a_2) \circ_1 (1, b_1, b_2) := (1, a_1 + b_2, a_2 + b_1)$;

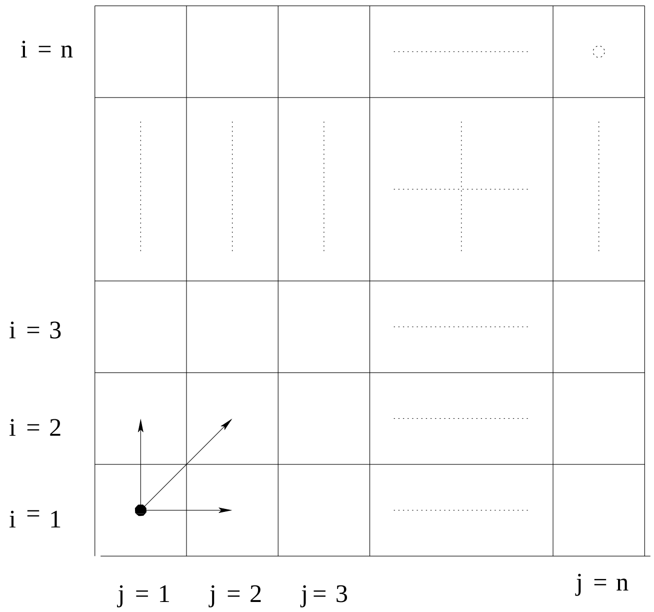
   ii) $(1, a_1, a_2) \circ_2 (1, b_1, b_2) := (1, a_1 + b_1 + 1, a_2 + b_2 + 1)$;

   iii) $(1, a_1, a_2) \circ_3 (1, b_1, b_2) := (1, a_1 + b_1, a_2 + b_2 + a_1 \cdot b_1)$.

b) Betragt de $i \in \{1, 2, 3\}$ i del a) , for hvilke $(V, \circ_i)$ er en gruppe. Find for alle disse i et element x med maksimal orden i $(V, \circ_i)$ og beregn alle sideklasser af gruppen $(V, \circ_i)$ med hensyn til undergruppen som er frembragt af x.

Opgave No. 3 (20 point)

Lad $n > 1$ være et naturligt tal. Vi betragter et skakbræt med n rækker og n søjler. Rækkerne bliver numereret fra bunden mod toppen; søjlerne bliver numereret fra venstre mod højre. Se figuren.



En brik er placeret på feltet med koordinaterne $(1, 1)$ og skal bevæges til felt (n, n).
Der er tre forskellige tilladte træk:

i) at bevæge brikken en række mod toppen, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i + 1, j)$, hvor $i < 8$;

ii) at bevæge brikken en søjle mod højre, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i, j + 1)$, hvor $j < 8$;

iii) at bevæge brikken et diagonalt skridt, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i + 1, j + 1)$, hvor $i < 8, j < 8$.

a) Beregn for $n = 4$ antallet af forskellige stier man har for at bevæge brikken fra $(1, 1)$ til $(4, 4)$. Kun de fornævnte regler er tillædt.

b) Hvad er, for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}, n > 1$, det minimale og det maksimale antal skridt for at bevæge brikken fra $(1,1)$ til (n,n)?

c) Antag at vi vil benytte præcist k diagonale skridt for at bevæge brikken fra $(1,1)$ til (n,n) (her hænger værdien k selvfølgeligt sammen med resultatet du har fundet i del b)). Hvor mange muligheder er der?

Angiv dit resultat som funktion af n og k.

d) Benyt del b) og c) for at bevise, at antallet af forskellige stier for at bevæge brikken fra $(1,1)$ til (n,n) er

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1+j}{n-1-j} \cdot \binom{2 \cdot j}{j} .$$

Opgave No. 4 (15 point)

Betragt den endelige mængde $A := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Hvor mange permutationer af elementerne i A eksisterer, hvis vi kræver, at ingen af mønsterne ab, cd, ef, gh forkommer?
Brug princippet om inklusion og eksklusion.

Opgave No. 5 (15 point)

a) Antag at de tre hændelser A_1, A_2, A_3 er uafhængige. Hver hændelse sker med sandsynligheden $\frac{1}{4}$.

   Beregn sandsynlighederne for hver af de følgende hændelser:

   i) mindst en af hændelserne A_1 ellr A_2 forekommer;

   ii) A_1 eller A_2 forekommer, men ikke begge to;

   iii) mindst en af hændelserne A_1, A_2 eller A_3 forekommer.

b) En hat indholder n mønter, hvoraf s er ægte og t er falske. De falske mønter giver plat med sandsynlighed $\frac{2}{3}$.

   Antag at en mønt er trukket tilfældigt fra hatten, og derefter kastes to gange. Resulatet er (PLAT,KRONE).

   Hvad er under denne antagelse sandsynligheden for, at mønten er ægte?

   Angiv dit resultat som funktion af s og t.

c) Antag i del b), at vi 120 gange trækker en mønt fra hatten, kaster den, noterer resulatet og placerer mønten tilbage i hatten.

   Hvordan skal vi vælge s (i forhold til n), hvis det forventede antal af KRONER skal være lige med eller større end 50?

Opgave No. 6 (10 point)

Lad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være givet som

$$f(n) = 5 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ (d.v.s. $n \geq 1$).

a) Beregn begyndelsesværdierne $f(1)$ and $f(2)$.

b) Funktionen f er løsningen til en rekursionsligning af formen:

$$f(n) = c_1 \cdot f(n-1) + c_2 \cdot f(n-2)$$

Beregn c_1 og c_2.

c) Brug induktion til at bevise, at f er en løsning til rekursionsligningen defineret med de beregnede værdier.