<u>**Opgave No. 1** (20 point)</u>

a) Bevis at, hvis $m^x \equiv m^y \pmod{n}$ for nogle positive heltal x, y, m, and n, da er $m^{x+k} \equiv m^{y+k} \pmod{n}$ for alle heltal $k \geq 0$.

b) Benyt Fermat's Little Theorem til at beregne de to værdier:

$$\begin{aligned} &5^{74} \pmod{7} \\ &5^{74} \pmod{13} \end{aligned}$$

c) Benyt dine resultater fra del (b) og den kinesiske restklassesætning til at finde $5^{74} \pmod{91}$. (Hvis du ikke kunne løse del (b), gæt to forskellige værdier og løs del (c) med dem.)

Opgave No. 2 (20 point)

Q_n, n-kuben er defineret i lærebogen. Den kan også defineres rekursivt som følger:

- $Q_1 = (V_1, E_1)$, hvor $V_1 = \{0, 1\}$ og $E_1 = \{\{0, 1\}\}$.
- $Q_n = (V_n, E_n)$, hvor

$$\begin{aligned} V_n &= \{0v \mid v \in V_{n-1}\} \cup \{1v \mid v \in V_{n-1}\} \\ E_n &= \{\{0u, 0v\} \mid \{u, v\} \in E_{n-1}\} \cup \\ &\quad\ \{\{1u, 1v\} \mid \{u, v\} \in E_{n-1}\} \cup \\ &\quad\ \{\{0v, 1v\} \mid v \in V_{n-1}\} \end{aligned}$$

Bemærk at $0v$ er resultatet af at konkatenere tegnet 0 foran strengen v, og $1v$ er det tilsvarende, men med 1 foran i stedet for 0.
Resulatet er, at knuderne i Q_n er de 2^n bit strenge af længde n, og to knuder i Q_n er forbundet, hvis og kun hvis deres bit strenge har præcis et bit til forskel.

a) Hver knud i Q_n har den samme grad, hvilken? (Angiv dit resultat som funktion af n.)

b) Angiv for Q_4 en sti af længde 4 fra 0000 til 1111.

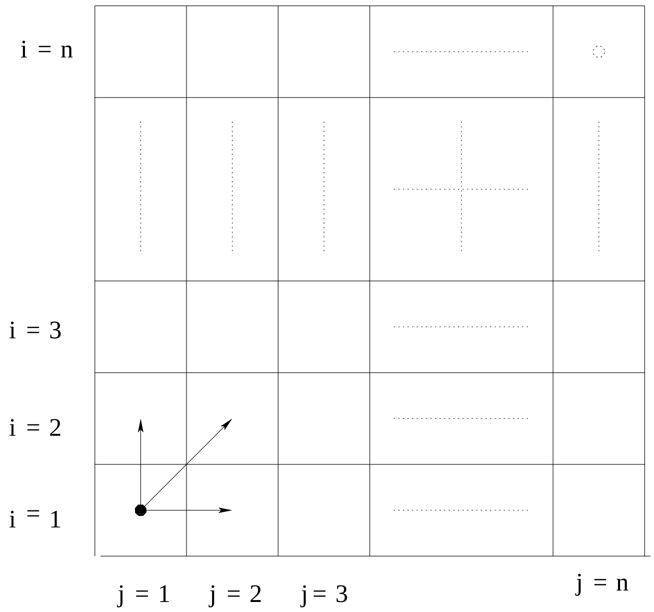
c) Bevis ved induktion, at den korteste sti mellem vilkårlige to knuder i Q_n har længde højst n.

d) Angiv adjacensmatricen for Q_2.

e) Angiv en indeling af knuderne, som viser at Q_n er to-delt for alle n. (Vink: Man kan gøre det generelt, uden at nævne n.)

Opgave No. 3 (20 point)

Lad $n > 1$ være et naturligt tal. Vi betragter et skakbræt med n rækker og n søjler. Rækkerne bliver numereret fra bunden mod toppen; søjlerne bliver numereret fra venstre mod højre. Se figuren.



En brik er placeret på feltet med koordinaterne $(1, 1)$ og skal bevæges til felt (n, n).
Der er tre forskellige tilladte træk:

i) at bevæge brikken en række mod toppen, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i + 1, j)$, hvor $i < 8$;

ii) at bevæge brikken en søjle mod højre, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i, j + 1)$, hvor $j < 8$;

iii) at bevæge brikken et diagonalt skridt, d.v.s. fra position (i, j) til position $(i + 1, j + 1)$, hvor $i < 8, j < 8$.

a) Beregn for $n = 4$ antallet af forskellige stier man har for at bevæge brikken fra $(1, 1)$ til $(4, 4)$. Kun de fornævnte regler er tillædt.

b) Hvad er, for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}, n > 1$, det minimale og det maksimale antal skridt for at bevæge brikken fra $(1, 1)$ til (n, n)?

c) Antag at vi vil benytte præcist k diagonale skridt for at bevæge brikken fra $(1, 1)$ til (n, n) (her hænger værdien k selvfølgeligt sammen med resultatet du har fundet i del b)). Hvor mange muligheder er der?

   Angiv dit resultat som funktion af n og k.

d) Benyt del b) og c) for at bevise, at antallet af forskellige stier for at bevæge brikken fra $(1, 1)$ til (n, n) er

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1+j}{n-1-j} \cdot \binom{2 \cdot j}{j} .$$

Opgave No. 4 (15 point)

Betragt den endelige mængde $A := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Hvor mange permutationer af elementerne i A eksisterer, hvis vi kræver, at ingen af mønsterne ab, cd, ef, gh forkommer?
Brug princippet om inklusion og eksklusion.

Opgave No. 5 (15 point)

a) Antag at de tre hændelser A_1, A_2, A_3 er uafhængige. Hver hændelse sker med sandsynligheden $\frac{1}{4}$.

Beregn sandsynlighederne for hver af de følgende hændelser:

i) mindst en af hændelserne A_1 ellr A_2 forekommer;

ii) A_1 eller A_2 forekommer, men ikke begge to;

iii) mindst en af hændelserne A_1, A_2 eller A_3 forekommer.

b) En hat indholder n mønter, hvoraf s er ægte og t er falske. De falske mønter giver plat med sandsynlighed $\frac{2}{3}$.

Antag at en mønt er trukket tilfældigt fra hatten, og derefter kastes to gange. Resulatet er (PLAT,KRONE).

Hvad er under denne antagelse sandsynligheden for, at mønten er ægte?

Angiv dit resultat som funktion af s og t.

c) Antag i del b), at vi 120 gange trækker en mønt fra hatten, kaster den, noterer resulatet og placerer mønten tilbage i hatten.

Hvordan skal vi vælge s (i forhold til n), hvis det forventede antal af KRONER skal være lige med eller større end 50?

Opgave No. 6 (10 point)

Lad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være givet som

$$f(n) = 5 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ (d.v.s. $n \geq 1$).

a) Beregn begyndelsesværdierne $f(1)$ and $f(2)$.

b) Funktionen f er løsningen til en rekursionsligning af formen:

$$f(n) = c_1 \cdot f(n-1) + c_2 \cdot f(n-2)$$

Beregn c_1 og c_2.

c) Brug induktion til at bevise, at f er en løsning til rekursionsligningen defineret med de beregnede værdier.