

Opgave 8.9

Til opgaven skal vi bruge følgende definitioner fra bogen:

```
-- rev (p. 149)
rev :: [a] -> [a]
rev xs = shunt xs []                                -- (rev.1)

-- shunt (p. 148)
shunt :: [a] -> [a] -> [a]
shunt [] ys = ys                                   -- (shunt.1)
shunt (x:xs) ys = shunt xs (x:ys)                 -- (shunt.2)

-- (++) (p. 144)
(++ ) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ zs = zs                                       -- (++.1)
(w:ws) ++ zs = w:(ws++zs)                          -- (++.2)
```

Undervejs i opgaven har vi brug for følgende lille lemma:

Lemma 1. *For alle ys og zs gælder:*

```
shunt ys zs = shunt ys [] ++ zs                    -- (lemma)
```

Bevis: Dette vises per induktion over ys.

- *Basistilfælde*, $ys = []$

Ved indsættelse får vi følgende:

```
VS = shunt [] zs                                  -- pr. (shunt.1)
    = zs                                           -- pr. (++.1)
    = [] ++ zs                                     -- pr. (shunt.1)
    = shunt [] [] ++ zs
    = HS
```

- *Skridt*, $ys \rightarrow (y:ys)$

Denne gang får vi:

```
VS = shunt (y:ys) zs                              -- pr. (shunt.2)
    = shunt ys (y:zs)                              -- pr. induktionshypotese
    = shunt ys [] ++ (y:zs)                        -- pr. (++.2)
    = shunt ys [] ++ ([y] ++ zs)                  -- pr. ass. af (++)
    = (shunt ys [] ++ [y]) ++ zs                  -- pr. induktionshypotese
    = shunt ys [y] ++ zs                           -- pr. (shunt.2)
    = shunt (y:ys) [] ++ zs
    = HS
```

Hvis det skulle gøres helt korrekt, skulle vi også vise, at ++ er en associativ operator (ass af (++) under beviset). Dette vil vi dog ikke gøre.

Vi kan dernæst gå i gang med selv opgaven:

Sætning 2. Vi skal vise, at for alle endelige lister xs og ys gælder:

$rev (xs ++ ys) = rev ys ++ rev xs$

Bevis: Per definition af rev skal vi derfor vise følgende:

$shunt (xs ++ ys) [] = shunt ys [] ++ shunt xs []$

Dette viser sig dog at være svært at gøre. Vi vil derfor bevise følgende generaliserede udgave af sætningen: (for alle zs)

$shunt (xs ++ ys) zs = shunt ys [] ++ shunt xs zs$ -- (hyp)

Dette gøres for alle ys og zs per induktion over xs .

- *Basistilfælde*, $xs = []$

Ved indsættelse får vi følgende:

```
VS = shunt ([] ++ ys) zs          -- pr. (++ .1)
    = shunt ys zs                 -- pr. (lemma)
    = shunt ys [] ++ zs          -- pr. (shunt.1)
    = shunt ys [] ++ shunt [] zs
    = HS
```

- *Skridt*, $xs \rightarrow (x:xs)$

Vi antager at sætningen gælder for xs , og skal vise, at den gælder for $x:xs$ – vi får følgende:

```
VS = shunt ((x:xs) ++ ys) zs      -- pr. (++ .2)
    = shunt (x:(xs++ys)) zs       -- pr. (shunt.2)
    = shunt (xs++ys) (x:zs)       -- pr. induktionshypotese
    = shunt ys [] ++ shunt xs (x:zs) -- pr. (shunt.2)
    = shunt ys [] ++ shunt (x:xs) zs
    = HS
```

Dette er dermed vist.