Mini-formelsamling

Matematik 1

Indholdsfortegnelse

1 Diverse nyttige regneregler

1.1 Regneregler for brøker

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$	**Addition og subtraktion**. Når man gerne vil lægge to brøker sammen/trække fra, findes en fælles nævner.
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	**Multiplikation**. Når to brøker ganges, ganger man tæller med tæller og nævner med nævner.
$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	**Division**. Når en brøk divideres med en anden brøk, ganger man med den omvendte dvs. den første brøks tæller med den anden brøks nævner og så den første brøks nævner med den anden brøks tæller.
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot t}{b \cdot t}\ ; t \in \mathbb{R}$	**Forlængelse**. Når en brøk skal forlænges, skal det man ønsker at forlænge med både ganges på tæller og nævner.
$\frac{a}{b} = \frac{a/t}{a/t}\ ; t \in \mathbb{R}$	**Forkortelse**. Hvis en brøk kan forkortes, skal man forkorte med det samme både i tæller og nævner.
$t \cdot \frac{a}{b} = \frac{t \cdot a}{b}\ ; t \in \mathbb{R}$	**Multiplikation med tal**. Hvis et tal skal ganges på en brøk, ganges det på tælleren.
$\frac{a}{b} / t = \frac{a}{b \cdot t}\ ; t \in \mathbb{R}$	**Division med tal**. Hvis en brøk skal deles med et tal, ganges dette på nævneren.

1.2 Potensregneregler

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Når to potenser med samme rod ganges, lægges eksponenterne sammen.
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	Når to potenser med forskellige rødder men samme eksponent ganges, ganger man rødderne sammen i en parentes der opløftes i den fælles eksponent.
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Når en potens deles med en anden potens og de har fælles rødder, trækkes eksponenterne fra hinanden.
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	Når to potenser med forskellige rødder men samme eksponent divideres, dividerer man rødderne sammen i en parentes der opløftes i den fælles eksponent.
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Hvis en potens opløftes i en eksponent, ganges de to eksponenter.
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	Er en rod opløftet i en negativ eksponent, er det det samme som at skrive 1 over roden opløftet i den positive eksponent
$a^0 = 1$	Alt opløftet i 0'te giver 1.
$1^{hvad\ som\ helst!} = 1$	1 opløftet i hvad som helst, giver bare 1.

1.3 Kvadratsætninger

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

1.4 (Nogle) Rod-regneregler

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$

$\sqrt[m \cdot n]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[m]{a^p}$

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

1.5 Den naturlige logaritme

$ln(e) = 1$

$ln(1) = 0$

1.6 "Idiot-reglen"

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

1.7 Nulreglen

Hvis man har en ligning, hvor der f.eks. står: $4x^2 - 2x = 0$, så kan det være en fordel at sætte x og evt. et tal, der går op i begge koefficienter (her 2) udenfor en parentes, i stedet for at løse ligningen ved diskriminant-metoden.

Dvs.: $2x(2x-1) \Rightarrow 2x = 0 \vee 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$ $(\vee\ betyder\ eller)$

2 Funktion-Differentialkvotient-Stamfunktion

Funktion f(x)	Differentialkvotient/afledte f'(x)	Stamfunktion/ubestemt integral F(x)
0	0	$k\,;k\ \in \mathbb{R}$
a	0	$a \cdot x + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
x	1	$\frac{1}{2} \cdot x^2 + k;k\ \in \mathbb{R}$
x^q	$q \cdot x^{q-1}$	$\frac{1}{q+1} \cdot x^{q+1} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$ln\lvert x\rvert + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$e^x + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$e^{b\cdot x}$	$b \cdot e^{b\cdot x}$	$\frac{e^{b\cdot x}}{b} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$	$\frac{a^x}{ln(a)} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$a \cdot x + b$	a	$\frac{1}{2} \cdot a \cdot x^2 + b \cdot x + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$b \cdot a^x$	$b \cdot a^x \cdot ln(a)$	$\frac{b}{ln(a)} \cdot a^x + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$b \cdot x^a$	$b \cdot a \cdot x^{a-1}$	$\frac{b}{a+1} \cdot x^{a+1} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot ln(x) - x + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$log(x)$	$\frac{log(e)}{x}$	$log(e) \cdot (x \cdot ln(x) - x) + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$-cos(x) + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$sin(x) + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$-ln\lvert cos(x)\rvert + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$sin(c \cdot x)$	$c \cdot cos(c \cdot x)$	$-\frac{cos(c \cdot x)}{c} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$cos(c \cdot x)$	$-c \cdot sin(c \cdot x)$	$\frac{sin(c \cdot x)}{c} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$
$tan(c \cdot x)$	$c \cdot \left(1 + tan^2(c \cdot x)\right)$	$-\frac{ln\lvert cos(c \cdot x)\rvert}{c} + k\,;k\ \in \mathbb{R}$

3 Differentiation

3.1 Regneregler

$\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)\,; k \in \mathbb{R}$	Hvis en konstant ganges på en funktion og denne differentieres, beholdes konstanten og funktionen differentieres som normalt.
$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$	Når to funktioner lagt sammen eller trukket fra hinanden differentieres, differentieres den første funktion og derefter lægges/trækkes fra den anden funktion differentieret.
$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Produktreglen: Når produktet af to funktioner skal differentieres tager man den første funktion **differentieret** gange den anden funktion **udifferentieret** + den første funktion **udifferentieret** gange den anden funktion **differentieret**.
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}\right)$	Når en brøk af to funktioner differentieres opstilles en ny brøk, hvor der i tælleren står: den første funktion **differentieret** gange den anden funktion **udifferentieret** minus den første funktion **udifferentieret** gange den anden funktion **differentieret**. I nævneren står der den anden funktion i anden.
$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$	Kædereglen: Når en funktion af en funktion **differentieres**, differentierer man den **ydre** funktion og **lader indmaden stå**, og ganger det hele med **indmaden** (den indre funktion) **differentieret**. EKSEMPEL: $\left(ln(x^2-3)\right)' = \frac{1}{(x^2-3)} \cdot 2x$

OBS! Ved en funktion med mere end en variabel, bruges ofte implicit differentiation.

Eksempel:

$y^3 + 3x^2 \cdot y = 13$ $\frac{dy}{dx}: 3y^2 \cdot y' + 6x \cdot y + 3x^2 \cdot y' = 0$	Her ser man y som en funktion af x, og differentierer mht. x. Det første led $3y^2 \cdot y'$ fås ved at bruge kædereglen på y^3, idet der er tale om en sammensat funktion, hvor den ydre funktion er "i tredje" og den indre funktion er y. Det næste led $6x \cdot y + 3x^2 \cdot y'$ fås af $3x^2 \cdot y$ ved at bruge produktreglen. Her er $3x^2$ den første funktion og y den anden funktion.

3.2 Implicit differentiation

Ved en funktion af flere variable kan det være en fordel at bruge implicit differentiation:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Eksempel:

$$e^{2x-y} + x - y = 0$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{e^{2x-y} \cdot 2 + 1}{e^{2x-y} \cdot (-1) - 1} = -\frac{2e^{2x-y} - 1}{-e^{2x-y} - 1} = \frac{2e^{2x-y} + 1}{e^{2x-y} + 1}$$

3.3 Partiel differentiation

Partiel differentiation, bruges ved funktioner af flere variable: $f(x, y)$, og skrives:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : f \ \ differentieres \ \ mht. x, og \ \ y \ \ holdes \ \ konstant$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : f \ \ differentieres \ \ mht. \ y, og \ \ x \ \ holdes \ \ konstant$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) : f \ \ differentieres \ \ to \ \ gange \ \ begge \ \ gange \ \ mht. \ x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) : f \ \ differentieres \ \ to \ \ gange \ \ begge \ \ gange \ \ mht. \ y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : f \ \ differentieres \ \ to \ \ gange \ \ først \ \ med \, hensyn \ \ til \, x \ \ \ dernæst \ \ med \ \ hensyn \ \ til \ \ y$$

Det gælder også at: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (for de funktioner vi arbejder med).

De partielle afledte af 1. orden: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

De partielle afledte af 2. orden: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ **OG** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

3.4 Differentialet

Differentialet for en funktion *f* beskrives som:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Dvs. hvis der sker en ændring i x- og y-værdierne fra et punkt, kan man vha. differentialet, finde ud af hvilken ændring det har for *f* ud fra det oprindelige punkt. Vi skal altså have udregnet differentialet for *f*, for punktet (1,1) (eksempelvis), hvis x ændrer sig fra 1 til 3 og y ændrer sig fra 1 til 4, bliver hhv. *dx = 3 - 1 =2* og *dy = 4 – 1 = 3*. Disse indsættes således i ligningen for differentialet for *f*, og ændringen for *f* er fundet. OBS! Når ændringen eksempelvis *dx* skal regnes ud er det vigtigt, man tager den nye værdi minus den gamle, lige meget om dette giver et negativt tal. Desuden skal man være opmærksom på, at bliver man bedt om den nye *f*-værdi, skal man lægge ændringen for *f* til den oprindelige *f*-værdi.

4 Approksimation

4.1 Lineær approksimation

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

4.2 Kvadratisk approksimation

$$P_2(x) = f(x_0) + f'^{(x_0)} \cdot (x - x_0) + \tfrac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

5 Elasticitet

Elasticiteten kan bruges til at fortælle om, hvilken ændring efterspørgslen får/hvilken procentforøgelse y får, hvis man hæver prisen x med en bestemt procentdel. Dvs. hvis vi f.eks. har beregnet elasticiteten i et bestemt punkt til $-\frac{1}{4}$ og vi får af vide, at prisen sættes op med 8 %, da fås:

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{4} \cdot 8\% = -2\%.$$

Altså falder efterspørgslen med 2 % eller procentforøgelsen af y bliver -2 %. Ofte bliver man bedt om, at beregne den nye y-værdi, såfremt x forøges med 8 %.

Denne beregnes således:

$$y_{ny} = y_{gl} \cdot (1 + procenrforøgelsen)$$

I vores eksempel vil det sige: $y_{ny} = 5 \cdot \left(1 + (-2\ \%)\right) = 4{,}9$

5.1 Elasticiteten af y mht. x

er givet ved:

$$\boldsymbol{El_x y = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

(Skal elasticiteten findes i et bestem punkt f.eks. (3,4), og $\frac{dy}{dx}$ i dette punkt allerede er beregnet, kan man blot sige: $\frac{3}{4} \cdot \frac{dy}{dx}(3{,}4)$
Dvs. direkte indsætte punktet (3,4), i stedet for først at udregne elasticiteten og derefter indsætte x- og y-værdierne)

5.2 Regneregler for elasticitet

$$El_x A = 0$$

$$El_x(f \cdot g) = El_x f + El_x g$$

$$El_x\left(\frac{f}{g}\right) = El_x f - El_x g$$

$$El_x(f \pm g) = \frac{f \cdot El_x f \pm g \cdot El_x g}{f \pm g}$$

$$El_x(f)^a = a \cdot El_x f \quad ; \quad når\ a = en\ konstant$$

$$El_x f\big(g(x)\big) = El_u f(u) \cdot El_x u \quad ; \quad når\ u = g(x)$$

6 Integralregning

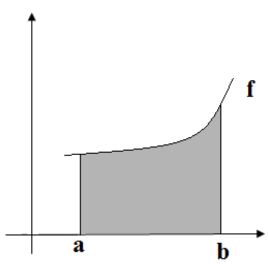
Integralregning er nærmest omvendt differentialregning, og bruges bl.a. til at finde stamfunktioner og arealer.

6.1 Ubestemt integral/Stamfunktion

$$\int f(x)dx = F(x) + \ k \ ; \ \ k \in \mathbb{R} \ \text{ så } \ '(x) = f(x)$$

6.2 Bestemt integral/Areal

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$



6.3 Uegentlige integraler

$\int_b^a (f(x))\, dx \xrightarrow[b\to\infty]{} \int_\infty^a (f(x)) dx$

To tilfælde:

1) Integralet er divergent, hvis det er uendeligt.
2) Hvis integralet er et bestemt tal, er det konvergent.

(Gode eksempler herpå er de tidligere eksamensopgaver vi har lavet f.eks. opg. 3 side 89 i det røde hæfte)

6.4 Regneregler for integraler

I. $\int f \pm g = \int f \pm \int g$

II. $\int k \cdot f = k \cdot \int f$

III. $\int f \cdot g \;\; og \;\; \int \frac{f}{g}$ har ingen bestemt formel, brug *partiel integration* el. *integration ved substitution.*

i. <u>Partiel integration:</u>

$$\int \left(f'^{(x)} \cdot g(x) + f(x) \cdot g'^{(x)}\right) dx = f(x) \cdot g(x) + k$$

$$\Rightarrow \int \left(f'(x) \cdot g(x)\right) dx = f(x) \cdot g(x) - \int \left(f(x) \cdot g'(x)\right) dx$$

Eller skrevet på en anden måde: $\int (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{g}) - \int (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{g}')$

Eksempel:
$\int (x \cdot e^x)\, dx$ Hvis vi vælger $f(x) =$ og $g(x) = e^x$ fås $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^x - \int \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^x\right) dx$ (ved at bruge den **fede** linie). Dette gør det ikke lettere for os, men hvis vi derimod vælger $f(x) = e^x$ og $g(x) = x$ fås: $e^x \cdot x - \int (e^x \cdot 1)\, dx = x \cdot e^x - e^x + k$. Det er muligt at tjekke om man har regnet rigtigt, ved at differentiere det resultat man har fået. Derved skal man få de oprindelige funktioner der står i integralet til at starte med, her altså: $x \cdot e^x$.

ii. <u>Integration ved substitution:</u>

$$\int \left(f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\right) dx = \underline{f\left(g(x)\right) + k}$$

Vi sætter $g(x) = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)dx.$

Dvs. $\int \left(f'(u)\right) du = f(u) + k = \underline{f\left(g(x)\right) + k}.$

Eksempel:

$\int ((x^2 + 10)^{50} \cdot x) dx$. Vi sætter $g(x) = x^2 + 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dg = 2x \cdot dx$

Dvs.: $\int \left(\frac{1}{2}\left(g(x)\right)^{50}\right) dg = \frac{1}{2} \int \left(\left(g(x)\right)^{50}\right) dg = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{51} \cdot g(x)^{51}\right) + k = \frac{1}{102} \cdot g(x)^{51} + k$

$$= \frac{1}{102}(x^2 + 10)^{51} + k.$$

Igen kan man tjekke ved at differentiere det fundne udtryk, og skal derved have den oprindelige funktion, her: $(x^2 + 10)^{50} \cdot x$.

7 Stationære punkter

For en funktion f af flere variable, er det muligt at finde stationære punkter. Dette gøres ved at sætte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ og } \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0$$

Herved fås to ligninger indeholdende x og y, som løses på alm. vis, og derved findes de stationære punkter.
Hvis vi skal bestemme arten af de stationære punkter skal vi bruge:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad og \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Vi sætter:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

og bruger nedenstående skema til at bestemme arten af de stationære punkter.

Stationært punkt	A	B	C	$A \cdot C - B^2$	Fortegn på $A \cdot C - B^2$
(x_0, y_0)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$	$\dots$	+ eller -

Der gælder nu flg. om de stationære punkter:

Hvis $A \cdot C - B^2 > 0$ og $A > 0$, så er (x_0, y_0) lokalt min.

Hvis $A \cdot C - B^2 > 0$ og $A < 0$, så er (x_0, y_0) lokalt max.

Hvis $A \cdot C - B^2 < 0$, så er (x_0, y_0) et saddelpunkt.

Hvis $A \cdot C - B^2 = 0$, så kan intet sluttes.

8 Max og Min

Ønsker man at finde max eller min for en funktion, skal man som hovedregel undersøge det indre og randen.

8.1 Indre

Ser man først på det indre, er de stationære punkter de eneste muligheder. Her tager man altså det stationære punkt og finder funktionsværdien af det. Dvs. hvis vi har det stationære punkt (x_0, y_0), finder vi $f(x_0, y_0)$.

8.2 Randen

Her bruges de afgrænsninger vi får givet i opgaven, typisk at x og y er mindre/større end el. lig med et tal. Får vi f.eks. givet at $x \geq 0$ og $y \geq 0$, starter vi med at se på $x = 0$, dvs. vi udregner $f(0, y)$, dette giver en funktion af y, og for at finde max eller min af den, differentieres denne funktion af y og sættes lig med nul. Nu beregnes funktionsværdien for de to punkter vi nu har ($x = 0$) er givet fra starten, og vi fandt før et y_0, dvs. vi beregner $f(0, y_0)$. På samme måde beregner vi for $y = 0$, altså $f(,0)$ osv..

Vi har nu funktionsværdier fra et stationært punkt (indre) og for punkter på randen. Vi skal desuden huske at beregne funktionsværdien i begge betingelserne, her er det $f(0,0)$. Alle de funktionsværdier vi har sammenlignes, og ønsker vi at finde max (min), skal man vælge det punkt hvor funktionsværdien er størst (mindst).

Dog er der undtagelser, hvorved en randundersøgelse kan undgås: se det røde hæfte side 119.

9 Lagrange

Ved opgaver vedrørende Lagrange får man opgivet en funktion og en forudsætning. Oftest bliver man bedt om at opstille tre ligninger med tre ubekendte. Dette gøres ved at bruge den funktion man har fået $f(x, y)$ og trække λ gange forudsætningen (en ligning) fra,

I. dvs.: $L(x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot (forudsætning)$

Først differentierer man, for hver variabel:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\ og\ \frac{\partial L}{\partial y}$$

For at finde de tre ligninger med tre ubekendte, sættes disse tre ligninger nu lig nul:

II. $Ligning\ 1$: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$Ligning\ 2$: $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$Ligning\ 3$: $Den\ forudsætning\ man\ har\ fået: g(x, y) = c$

III. Disse tre ligninger skal løses, således man finder en løsning (x^*, y^*, λ^*).

IV. Bliver man bedt om at beregne max (min) af $f(x, y)$ under en vis forudsætning.
Her kan vi netop bruge de løsninger for *x* og *y* som vi lige har fundet,
dvs. vi beregner $f(x^*, y^*)$ og sammenligner disse værdier

Differentieres $f(x^*, y^*)$ fås netop λ. I det λ nærmest virker som differentialet her, bruger vi også denne, hvis vi skal finde ud af, hvad der sker, når der kommer en ændring i vores forudsætning. λ udtrykker altså den ændring, der sker pr. enhed ændring. (Se eks. opg. 8 side 108 i det røde hæfte).