# MAT 1+2 Oecon Juni 2010

**OPG. 1 a)** $P_1(x) = f(2) + f'(2)\cdot(x-2)$
$= 8.5 + 9\cdot(x-2)$
$= \underline{\underline{-9.5 + 9x}}$

$f(2.01) \approx P_1(2.01) = 8.5 + 9\cdot 0.01 = \underline{\underline{8.59}}$

**OPG. 1 b)** $f'(x) = 3x^2 + (-1)\cdot(x^3-6)^{-2}\cdot 3x^2$

$f'(2) = 12 - \frac{1}{4}\cdot 12 = 9$

$f''(x) = 6x + 2(x^3-6)^{-3}(3x^2)^2 + (-1)(x^3-6)^{-2}\cdot 6x$

$f''(2) = 12 + 2\cdot\frac{1}{8}\cdot 12\cdot 12 + (-1)\cdot\frac{1}{4}\cdot 12$
$= 12 + 36 - 3 = \underline{\underline{45}}$

$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2$
$= \underline{\underline{8.5 + 9(x-2) + 22.5(x-2)^2}}$

$f(2.01) \approx P_2(2.01) = 8.5 + 0.09 + 0.00225$
$= \underline{\underline{8.59225}}$

En lommeregner udregning giver:

$f(2.01) = (2.01)^3 + \frac{1}{(2.01^3-6)}$

$= 8.120601 + 0.471564429\ldots$
$= 8.592165\ldots$

så $P_2(2.01)$ er korrekt med 4 decimaler.

**OPG. 2 a)**

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{y^5+3x^2y^3}{5xy^4+3x^3y^2} = \underline{\underline{-\frac{y^3+3x^2y}{5xy^2+3x^3}}}$

$\frac{dy}{dx}$ for $x=3$ og $y=1$ er $-\frac{1+27}{15+81} = -\frac{28}{96}$
$= \underline{\underline{-\frac{7}{24}}}$

**OPG. 2 b)**

$El_x(y) = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \underline{\underline{-\frac{y^2+3x^2}{5y^2+3x^2}}}$

For $x=3$ og $y=1$ fås $El_x(y) = \frac{3}{1}\cdot\left(-\frac{7}{24}\right) = \underline{\underline{-\frac{7}{8}}}$

$x: 3 \rightarrow 3.24$ 8% vækst
$y: 1 \rightarrow ??$ $8\cdot(-\frac{7}{8})$% vækst
dvs $\underline{-7\%}$, dvs
et fald på 7%

y går dermed fra 1 til $\underline{0.93}$

Kan også udregnes således:

$y \approx 1 + \frac{dy}{dx}\cdot\Delta x = 1 - \frac{7}{24}\cdot 0.24$
$= 1 - 0.07 = \underline{\underline{0.93}}$

dvs y falder med 7%.

## OPG. 3a)

$$\int (4x^3+6x^2)\,dx = 4\cdot\tfrac{1}{4}x^4+6\cdot\tfrac{1}{3}x^3+c$$
$$= \underline{\underline{x^4+2x^3+c}}$$

$$\int_0^{10}(4x^3+6x^2)\,dx = \left[x^4+2x^3\right]_0^{10} = 10000+2000$$
$$= \underline{12000}$$

$$PS = 46000-12000 = \underline{\underline{34000}}$$

## OPG. 3b)

$$\int (4000+240000(x+10)^{-2})\,dx =$$
$$\underline{\underline{4000x+240000\cdot(-1)\cdot(x+10)^{-1}+c}}$$

$$\int_0^{10}(4000+240000(x+10)^{-2})\,dx =$$
$$\left[4000x-\frac{240000}{x+10}\right]_0^{10} =$$
$$40000-12000-(0-24000) =$$
$$40000-12000+24000 =$$
$$\underline{\underline{52000}}$$

$$CS = 52000-46000 = \underline{\underline{6000}}$$

## OPG. 4a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1000-4x_1-2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 800-2x_1-2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2$$

Stat. pkt. bestemmes af:

$$1000-4x_1-2x_2=0$$
$$800-2x_1-2x_2=0$$

Ved at trække ligen. 2 fra lign 1 fås

$$200-2x_1=0$$

dvs $\underline{\underline{x_1=100}}$. Af lign. 1 (eller 2) fås

så $1000-400-2x_2=0$, dvs $\underline{\underline{x_2=300}}$

Der er dermed kun (100,300) som stationært pkt.

## OPG. 4b)

Maksimum forekommer enten i det indre eller på randen af det lovlige område. Men da der ikke er stationære pkt. i det indre må maksimum forekomme på randen.

Randen består af 3 stykker, og det oplyses at maksimum forekommer for $x_1+x_2=300$.

Vi finder nu vha. Lagrange $\max f(x_1,x_2)$ ufa $x_1+x_2=300$

$$L(x_1,x_2)=1000x_1+800x_2-2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2 - \lambda(x_1+x_2-300)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1000-4x_1-2x_2-\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 800-2x_1-2x_2-\lambda$$

Man får dermed flg. lign.system:

$$\boxed{\begin{aligned} 1000-4x_1-2x_2-\lambda &= 0 \\ 800-2x_1-2x_2-\lambda &= 0 \\ x_1+x_2 &= 300 \end{aligned}}$$

Af lign. 1 og 2 fås:

$\lambda = 1000-4x_1-2x_2 = 800-2x_1-2x_2$

dvs $200 = 2x_1$, dvs. $\underline{x_1=100}$

Af lign. 3 fås så $\underline{x_2=200}$

max forekommer altså i pkt. $(100,200)$.

Max $f(x_1,x_2) = f(100,200) = \underline{\underline{160.000}}$

Maksimum på y-aksen forekommer i $(0,300)$ og værdien er 150.000.

Maksimum på x-aksen forekommer i $(250,0)$ og værdien er 125.000.

Maksimum på $x_1+x_2=300$ kan også findes ved at sætte $x_2=300-x_1$ i udtrykket for $f(x_1,x_2)$:

$$f(x_1, 300-x_1) = -x_1^2+200x_1+150000$$

Denne funktion har maksimum for $-2x_1+200=0$, dvs $x_1=100$ og $x_2=300-x_1=200$.

$$f(100,200) = 160000.$$

## OPG. 5 a)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 8 & 8 & 5 & b \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & c \end{pmatrix} \quad -1 \; -1 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & b-a \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -2 & c-a \end{pmatrix} \quad -1 \; 1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2a-b \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{pmatrix}}}$$

ialt 4 elementære rækkeoperationer

rang(K) = antal ledende 1 = 2

rang(T) = " " " $= \begin{cases} 2 & \text{når } 2a=b+c \\ 3 & \text{" } 2a\neq b+c \end{cases}$

## OPG. 5b)

Hvis $2a \neq b+c$ så er der ingen løsninger

Hvis $2a = b+c$ så er der uendelig mange:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2a-b-2s-2t-r \\ -a+b-3s-3t-2r \\ s \\ t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ -a+b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $a=b=c=1$ fås

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antal frihedsgrader = antal frievar. $= \underline{\underline{3}}$

## OPG. 6a)

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1) = 4-1 = \underline{\underline{3}}$$

$$q(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \underline{\underline{\lambda^2 - 4\lambda + 3}}$$

$= (\lambda-3)(\lambda-1)$, dvs <u>rødderne er 1 og 3</u>

## OPG. 6b)

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \underbrace{PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}}_{n \text{ gange}} = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ 1 & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

---

$$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 & 2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) \\ 2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

## OPG. 7a)

$$\det(I-A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2} + (-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$+ 0 - 1\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{1}{2}) - 0 - 0 =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$(I-A)^{-1}$ eksisterer da $\det(I-A) \neq 0$.

$(I-A)^{-1}$ kan findes på mindst to forskellige måder:

① $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{adj}(I-A) = C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)}\,\mathrm{adj}(I-A) = 8\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot 8$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

hvilket viser at $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

OPG. 7b)

$(I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\qquad (I-A)\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ giver at hvis $a=b=c=50$

så skal produktionen være

$$(I-A)^{-1}\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

OPG 8a)

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$

$Av_1 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$, dvs $v_1$ egenvektor med egenværdi 1.

$Av_2 = A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_2$, dvs $v_2$ egenvektor med egenværdi 0

$Av_3 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_3$, dvs $v_3$ egenvektor med egenværdi 2.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

OPG. 8b)

$$Q = x^2+y^2+z^2+2xz = (x,y,z)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = \underline{\underline{X^2 + 2Z^2}}$$

Det ses at $Q \geq 0$ altid, dvs Q er pos. semidef. Den er ikke pos. definit da $X=0, Y \neq 0, Z=0$ giver $Q=0$.

$$Q = 0 \iff \underline{X=0 \text{ og } Z=0}$$
$$\iff y=0 \text{ og } x+z=0$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det sidste ses også umiddelbart af

$$Q = x^2+y^2+z^2+2xz = (x+z)^2 + y^2$$

## VEJLEDENDE RETTEKODE :

Der gives 0-10 paints pr spørgsmål. Der kan derved opnås mellem 0 og 160 paints ialt.

Paint-bedømmelsen suppleres med en helhedsbedømmelse.

Mht. paints kan følgende "oversættelse" betragtes som vejledende

| | |
|---|---|
| 00 - 40 | -3 |
| 40 - 80 | 00 |
| 80 - 90 | 2 |
| 90 - 110 | 4 |
| 110-135 | 7 |
| 135-150 | 10 |
| 150-160 | 12 |

## MINE EGNE POINTS :