SYDDANSK UNIVERSITET
ESBJERG, KOLDING, KØBENHAVN, ODENSE, SLAGELSE, SØNDERBORG

Skriftlig eksamen

MATEMATIK 1

HA (Esbjerg, Kolding, København, Odense, Slagelse)
HA jur (Odense)

Mandag den 12. januar 2009 kl. 9.00 – 13.00

4 timer med alle hjælpemidler.

Der er 8 opgaver med i alt 16 spørgsmål. Hvert af de 16 spørgsmål tillægges samme vægt ved bedømmelsen.

Korrekt besvarelse af over halvdelen af spørgsmålene vil sikre beståelse.

Der lægges ved bedømmelsen vægt på, at der gives fyldestgørende begrundelser for svarene.

Opgave 1

Lad $f(x) = \sqrt[4]{8x + 16e^x} = (8x + 16e^x)^{1/4}$, hvor e^x er den sædvanlige eksponentialfunktion.

a) Opstil ved hjælp af $f(0) = 2$ og $f'(0) = 3/4$ den lineære approksimation $P_1(x)$ til $f(x)$ omkring 0.
Bestem heraf en tilnærmet værdi for $f(0.08)$.

b) Find $f'(x)$ og $f''(x)$.
Vis at $f''(0) = -11/32 = -0.34375$.
Opstil den kvadratiske approksimation $P_2(x)$ til $f(x)$ omkring 0, og bestem ved hjælp heraf en (bedre) tilnærmet værdi for $f(0.08)$.

Opgave 2

En kurve i (x , y)-planen gennem punktet (3 , 1) er givet ved ligningen

$$x^3 + 5y + x^2 \cdot y^5 = 41$$

a) **Find et udtryk for $\frac{dy}{dx}$ for denne kurve.**
Vis specielt at $\frac{dy}{dx} = -0.66$ for $x = 3$ og $y = 1$.

b) Find elasticiteten $El_x(y)$ af y med hensyn til x.

Angiv specielt elasticiteten for $x = 3$ og $y = 1$.

Hvilken %-vis ændring får y cirka fra værdien 1 når x aftager med 5 % fra 3 til 2.85 ? Hvad bliver værdien af y cirka ?

Opgave 3

Prisen p_1 på en vare V hænger sammen med udbuddet x på følgende måde :

$$p_1(x) = \tfrac{3}{4} \cdot x^2 + 10x = 0.75x^2 + 10x$$

Prisen p_2 på varen V hænger sammen med efterspørgslen x på følgende måde :

$$p_2(x) = 100 + (750/x) = 100 + \frac{750}{x}$$

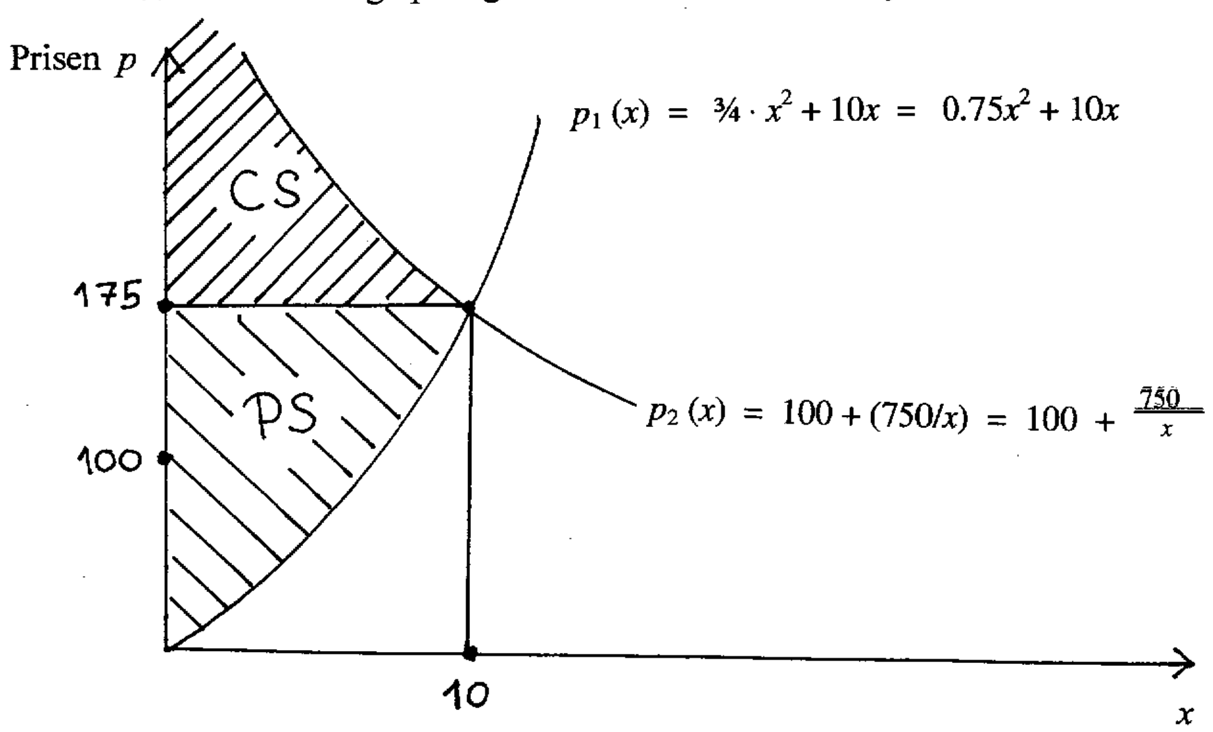
Ligevægt opnås ved $x = 10$ idet $p_1(10) = p_2(10) = 175$.

a) Find $\int (0.75x^2 + 10x)\,dx$ og $\int_0^{10} (0.75x^2 + 10x)\,dx$.

Hvilken størrelse har det på figuren skitserede areal *PS* ("producer surplus") ?

b) Find $\int_a^{10} \left(100 + \frac{750}{x}\right) dx$, hvor $0 < a < 10$.

Hvad er størrelsen af det på figuren skitserede areal *CS* ("consumer surplus"), som strækker sig op langs anden aksen i koordinatsystemet ?



Opgave 4

Betragt et andengradspolynomium på formen $p(x) = ax^2 + bx + c$, hvor a, b og c er konstanter, som opfylder $a \neq 0$ og $b^2 - 4ac > 0$.

Polynomiet har to rødder. Den største af de to rødder kaldes X, og fra en velkendt formel haves at

$$X = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a) = -b / (2a) + (b^2 - 4ac)^{1/2} / (2a).$$

a) Betragt X som en funktion af tre variable a, b og c.

Vis at den partielle afledede $\frac{\partial X}{\partial a}$ af X med hensyn til a er lig med :
$(b - 2ac(b^2 - 4ac)^{-1/2} - (b^2 - 4ac)^{1/2}) / (2a^2)$.

Vis at for $a = 1$, $b = -7$ og $c = 12$ (det vil sige for andengradspolynomiet $x^2 - 7x + 12$) er $X = 4$ og $\frac{\partial X}{\partial a} = -16$.

b) Benyt oplysningerne til sidst i spørgsmål a) til at give en tilnærmet værdi for den største rod X i andengradspolynomiet $1.005x^2 - 7x + 12$.

Opgave 5

Lad $f(x,y) = x^3 + a \cdot x^2 y + b \cdot x y^2 + y^3$ være en funktion af to variable x og y. De to tal a og b er konstanter.

a) Find de to partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Vis at $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot f(x,y)$ for en passende værdi af k.

b) Find de partielle afledede af anden orden for f.

Bestem værdier af a og b så der gælder at
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ for alle punkter (x,y).

Opgave 6 (a og b) og Opgave 7 (c og d)

Betragt følgende funktion f af to variable x og y :

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3x^2 + y^2 + 12$$

a) Find de partielle afledede af første og anden orden for f.

b) Vis at f har præcis to stationære punkter $(0\,,0)$ og $(2\,,6)$.
Bestem arten af de to stationære punkter.

c) Find minimum for $f(x,y)$ under forudsætning af at $x \geq 1$
(minimum eksisterer - der bedes **ikke** om begrundelse herfor).

d) Find minimum for $f(x,y)$ under forudsætning af at $x \geq 3$
(minimum eksisterer - der bedes **ikke** om begrundelse herfor).

Opgave 8

En producent af en vare V har udgifter til arbejde på 16 (målt i en passende enhed) pr anvendt arbejdstime og en udgift til kapital på 1 (målt i samme passende enhed) pr investeret kapitalenhed. Med L arbejdstimer og K kapitalenheder er den samlede udgift altså

$$f(L,K) = 16L + K.$$

Med L arbejdstimer og K kapitalenheder kan der produceres i alt g(L,K) enheder af V, hvor g er Cobb-Douglas funktionen

$$g(L,K) = 5 \cdot L^{2/3} \cdot K^{1/3}\,.$$

Der ønskes en produktion på i alt 100 enheder af V med så lav samlet udgift som mulig.

a) Vis ved hjælp af Lagranges metode, at når minimum for $16L + K$ under forudsætning af at $5 \cdot L^{2/3} \cdot K^{1/3} = 100$ forekommer, så er $K = 8L$.
Benyt dette til at bestemme minimum.

b) Såfremt der ønskes en produktion på 105 enheder af V i stedet for 100, hvad vokser de minimale samlede udgifter da med (angiv evt. blot et cirkatal) ?