# FACIT-LISTE MAT. 2 JUNI 09

## OPG. 1 a)

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & 3 & a \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -1 \quad -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 & a \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3} \quad -\frac{4}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \quad 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -5 \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

rang K = antal ledende 1 = $\underline{\underline{2}}$

rang T = $\begin{cases} 2 \text{ for } a = 0 \\ 3 \text{ for } a \neq 0 \end{cases}$

## OPG. 1 b)

Ingen løsn. når $a \neq 0$
Uendelig mange løsn. når $a = 0$
Aldrig præcis én løsning.

For $a=0$ fås at $x_1$ og $x_2$ er basis-variable, mens $x_3$ og $x_4$ er frie variable.

Fuldstændig løsning $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t}}$

## OPG. 1 c)

Max antal lin. uafh. søjler i K = rang(K) = 2
Tre eller fire søjler fra K er derfor lin. afh.

$\{s_1, s_4\}$ er lin. afh. De fem øvrige muligheder for at vælge to søjler, dvs $\{s_1,s_2\}$, $\{s_1,s_3\}$, $\{s_2,s_3\}$, $\{s_2,s_4\}$, $\{s_3,s_4\}$ er alle lin. uafh.
Vælges tre søjler i K fås altid en lin. afh. mæ. da rang(K) = 2.

**OPG. 1 d)** Da rang(K) = 2 er de tre rækker i K lin. afh.

$$K^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 & -7 & -3 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{3} & -1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Heraf ses:

$$\underline{\underline{r_1 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + r_2 \cdot \tfrac{4}{3} = r_3}}$$

Kan også løses ved at holde styr på rækkeoperationerne i 1a):

$$r_3 + (-1)r_1 + \left(-\tfrac{4}{3}\right)(r_2 - r_1) = 0$$

$$r_3 + \tfrac{1}{3}r_1 - \tfrac{4}{3}r_2 = 0$$

$$\underline{\underline{r_3 = -\tfrac{1}{3}r_1 + \tfrac{4}{3}r_2}}$$

---

**OPG. 2a)** 

$$\det A = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.8 + 0 + 0 - 0 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8$$

$$= 0.384 - 0.032 - 0.032$$

$$= \underline{\underline{0.32}}$$

$A^{-1}$ eksisterer da $\det A \neq 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.28 & 0.04 \\ 0.28 & 0.44 & 0.28 \\ 0.04 & 0.28 & 0.68 \end{pmatrix}$$

Plads 1,2 er udregnet sådan:

$$r_1 \cdot S_2 = (0.8,\ 0.2,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.2$$

$$= 0.16 + 0.12 = 0.28$$

De øvrige pladser tilsvarende!

**OPG. 2b)** $A \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.28 \\ 0.28 \end{pmatrix}}}$

$$A^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.28 \\ 0.28 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.312 \\ 0.280 \end{pmatrix}}}$$

Hvis fordelingen sidste år var 50%, 20%, 30% til V, D og S, så er fordelingen nu 44%, 28%, 28%, og næste år vil den være 40,8%, 31,2% og 28% (under forudsætning af samme overgangsmatrice)

**OPG. 2c)** $C_{12} = \det \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+2} = -0.16$

$C_{22} = \det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{2+2} = 0.64$

$C_{32} = \det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = -0.16$

$$C = \begin{pmatrix} * & -0.16 & * \\ * & 0.64 & * \\ * & -0.16 & * \end{pmatrix} \qquad \text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -0.16 & 0.64 & -0.16 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Anden række i $A^{-1} = \frac{1}{0.32}(-0.16, 0.64, -0.16)$

$= \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)}}$

idet $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$.

$\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) \cdot$ søjle 1 i $A = -\frac{1}{2} \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) \cdot$ søjle 2 i $A = -\frac{1}{2} \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 - \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 1$

$\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) \cdot$ søjle 3 i $A = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0.2 - \frac{1}{2} \cdot 0.8 = 0$

Altså <u>er</u> $\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$ række 2 i $A^{-1}$.

**OPG. 2d)** $A \begin{pmatrix} v \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ d \\ s \end{pmatrix}$ giver $(A - I)\begin{pmatrix} v \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \begin{pmatrix} v \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix}, \text{ dvs } v = d = s$$

Da $v + d + s = 1$ og $v = d = s$ fås $\underline{v = d = s = \frac{1}{3}}$, dvs. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$ <u>er en ligevægtstilstand</u>

**OPG. 3a)** $(I-A)\cdot(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Af plads (1,1) og (1,2) fås:

$1\cdot s + (-0.2)t + (-0.2)t = 1$
$1\cdot t + (-0.2)s + (-0.2)t = 0$

dvs: $s - 0.4t = 1$ og $0.8t - 0.2s = 0$

Af den sidste ligh. fås $s = 4t$, og af den første lign. fås så $3.6t = 1$, dvs.

$t = \frac{1}{3.6} = \frac{10}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$ og $s = 4t = \frac{20}{18} = \underline{\underline{\frac{10}{9}}}$

**OPG. 3b)** $(I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Heraf fås

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa+tb+tc \\ ta+sb+tc \\ ta+tb+sc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9}a + \frac{5}{18}b + \frac{5}{18}c \\ \frac{5}{18}a + \frac{10}{9}b + \frac{5}{18}c \\ \frac{5}{18}a + \frac{5}{18}b + \frac{10}{9}c \end{pmatrix}$$

For $a=180$, $b=180$ og $c=180$ fås

$\underline{\underline{x = y = z}} = \left(\frac{10}{9} + \frac{5}{18} + \frac{5}{18}\right)\cdot 180 = \frac{15}{9}\cdot 180 = \underline{\underline{300}}$

**OPG. 3c)** $(1500, 1500, 1500)\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} =$

$\underline{\underline{(900, 900, 900)}}$

$(p, q, r) = (u, v, w)\cdot\begin{pmatrix} s & t & t \\ t & s & t \\ t & t & s \end{pmatrix} = (990, 900, 900)\cdot\begin{pmatrix} s & t & t \\ t & s & t \\ t & t & s \end{pmatrix} =$

$(990s + 1800t, 900s + 1890t, 900s + 1890t) =$

$(990\cdot\frac{10}{9} + 1800\cdot\frac{5}{18}, 900\cdot\frac{10}{9} + 1890\cdot\frac{5}{18}, 900\cdot\frac{10}{9} + 1890\cdot\frac{5}{18}) =$

$\underline{\underline{(1600, 1525, 1525)}}$

**OPG. 3d)** $p = u\cdot s + v\cdot t + wt$
$= u\cdot\frac{10}{9} + v\cdot\frac{5}{18} + w\cdot\frac{5}{18}$

Hvis $u$ stiger med $\Delta u$ $\underline{\underline{\text{stiger } p \text{ med } \frac{10}{9}\Delta u}}$

Tilsvarende stiger $q$ og $r$ begge med $t\cdot\Delta u$, dvs. med $\underline{\underline{\frac{5}{18}\cdot\Delta u}}$

# OPG. 4a)

$Av_1 = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$, dvs $v_1$ egenvektor med $\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$

$Av_2 = A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.8\\0\\-0.8\end{pmatrix} = 0.8v_2$, " $v_2$ " " $\underline{\underline{\lambda_2 = 0.8}}$

$Av_3 = A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.4\\-0.8\\0.4\end{pmatrix} = 0.4v_3$, " $v_3$ " " $\underline{\underline{\lambda_3 = 0.4}}$

# OPG. 4b)

$S_1^t \cdot S_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = 0$, dvs $S_1 \perp S_2$

$\|S_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1$

Tilsvarende kan vises at $S_1 \perp S_3$, $S_2 \perp S_3$, $\|S_2\| = \|S_3\| = 1$.

P er ortogonal, så

$$P^{-1} = P^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}}}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 0.4\end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 0.4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0.8^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0.4^{-1}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}}}$$

# OPG. 4c)

$D^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1} \cdot P$

Heraf fås ved at gange med P fra venstre og $P^{-1}$ fra højre, at $A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$.

Heraf fås

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}* & * & *\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ * & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}* & * & *\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{6}}\\ * & * & *\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}* & * & *\\ \frac{1}{3}-\frac{5}{6} & \frac{1}{3}+\frac{10}{6} & \frac{1}{3}-\frac{5}{6}\\ * & * & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & * & *\\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2}\\ * & * & *\end{pmatrix}$$

Stemmer med OPG. 2c

# OPG. 4d)

$$Q = (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x,y,z)\cdot P\cdot P^{-1}A\cdot PP^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= (\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{Z})\cdot D\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{X}\\\mathbb{Y}\\\mathbb{Z}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{X}^2+0.8\,\mathbb{Y}^2+0.4\,\mathbb{Z}^2}}$$

Da $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$ er $Q$ positiv definit (og altså også positiv semidefinit).

$$\underline{\underline{Q=0 \iff \mathbb{X}=\mathbb{Y}=\mathbb{Z}=0 \iff x=y=z=0}}$$

---

**Korrekt besvarelse af mindst halvdelen af sættet sikrer beståelse.**

**Der gives ved bedømmelsen 0-10 points pr spørgsmål, dvs. 0-160 points i alt for de 16 spørgsmål.**
**Vejledende skema:**

| | | |
|---|---|---|
| **00-30** | **points** | **giver -3.** |
| **30-80** | **points** | **giver 00.** |
| **80-90** | **points** | **giver 02.** |
| **90-105** | **points** | **giver 4.** |
| **105-130** | **points** | **giver 7.** |
| **130-150** | **points** | **giver 10.** |
| **150-160** | **points** | **giver 12.** |