Skriftlig Eksamen
Automatteori og beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense Universitet

Lørdag, den 13. januar 2007

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebog, notater etc.), samt brug af lommeregner er tilladt.
Eksamenssættet består af 6 opgaver på 6 nummererede sider (1–6).
Bagerst findes en engelsk oversættelse ligeledes på 6 nummerede sider (7-12).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i point. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt!). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

You are allowed to use the text-book, your personal notes and a pocket calculator.
The exam contains 6 problems, each on a single page. The danish version can be found on pages 1-6, the english version is on pages 7-12.
A complete solution consists of a solution for all 6 problems. How much a problem weights can be seen from the numbers given in brackets for each problem. In general you may refer to results from the book unless it is explicitely stated that you may not. The same holds for problems solved in the exercise sessions. Of course, if you cite such a result it has to be obvious that your claim really is a straightforward consequence of that result.
It will not be accepted as an answer to refer to other books than the text-book.

Recall that you have to explain all your claims!

Opgave 1 (20 %)

Hvilke af følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske? Begrund alle dine svar!

a) Lad $L \subset \{0,1\}^*$ være et uendeligt sprog som kan afgøres. Der findes et $n \in \mathbb{N}$ således at for alle strenge $w \in L$ med $|w| \geq n$ gælder:

   Der findes $x, y, z \in \{0,1\}^*$ med $|y| \geq 1$ som opfylder $w = xyz$ og for alle $k \in \mathbb{N}$ gælder $xy^kz \in L$.

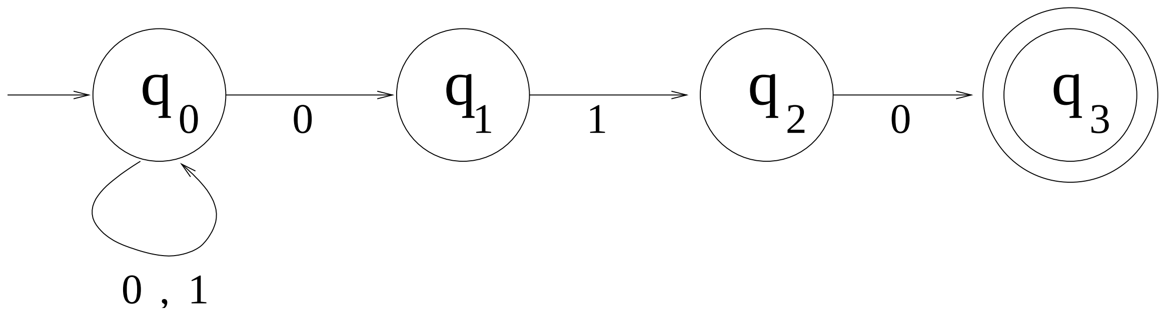
b) Følgende problem kan afgøres: Givet en kodning af en DFA M som arbejder over alfabetet Σ og en DFA N som arbejder over alfabetet Γ (hvor Γ indeholder alle nødvendige bogstaver for at kode M), automaten N accepterer beskrivelsen af M.

c) Lad L være et kontekstfrit sprog. Der findes uendelig mange forskellige Turing maskiner som accepterer L.

d) Lad $A_1, A_2, \ldots$ være en uendelig sekvens af afgørlige sprog. Sproget $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ kan afgøres.

Opgave 2 (20 %)

a) For den ikke-deterministiske endelige automat i figuren find en ækvivalent deterministisk endelig automat.



Transitionerne som ikke er vist i figuren leder til en ikke-accepterende sink-tilstand.

b) Giv et regulært udtryk for sproget som automaten accepterer.

Opgave 3 (10 %)

Lad M være en DFA (deterministisk endelig automat) med $n \in \mathbb{N}$ tilstande, som arbejder over et endeligt alfabet Σ, og lad s være start-tilstanden i M. Bevis følgende påstand: Antag at q er en tilstand af M som kan nåes fra s ved en af M's beregninger, d.v.s. der findes en streng $w \in \Sigma^*$ så at $(s, w) \xrightarrow{*} q$. Da findes en streng $v \in \Sigma^*$ af længden $|v| \leq n - 1$, så q kan nåes fra s ved at læse v, d.v.s. $(s, v) \xrightarrow{*} q$.

Opgave 4 (25 %)

a) Konstruer en kontekstfri grammatik G for følgende sprog

$$L := \{a^i b^j a^k | i + k \geq j;\ \ i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

b) Betragt sproget

$$L := \{a^i b^j | i = j^2, i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Er L kontekstfrit? Bevis dit svar.

Opgave 5 (10 %)

Definer en funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ved

$$f(n,m) := \begin{cases} \sqrt{n \cdot m} & \text{hvis } n \cdot m \text{ er et kvadrattal} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Er f beregnelig med en Turing maskine over $\{0,1\}^*$ hvis vi benytter en passende kodning af $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}^2$ over $\{0,1\}^*$? Hvis svaret er 'ja' giv en uformel beskrivelse af en Turing maskine som beregner f, hvis svaret er 'nej' giv et præcist argument hvorfor.

Opgave 6 (15 %)

Hvilke af følgende problemer er afgørlige, hvilke er uafgørlige? Begrund alle dine svar!
Alle input antages at være repræsenteret i en passende kodning.

a) Givet to kontekstfrie grammatiker G_1 og G_2, er $L(G_1) \cap L(G_2)$ et regulært sprog?

b) Givet en Turing maskine M, indeholder $L(M)$ et regulært sprog som en delmængde?

c) Givet en kontekstfri grammatik G og en Turing maskine M, er sproget $L(M) \cap L(G) \neq \emptyset$?

Vink for del a): Uden bevis må du benytte at det følgende problem er uafgørligt: Givet en kontekstfri grammatik G, er $L(G)$ et regulært sprog?

Problem 1 (20 %)

For each of the following statements decide whether it is true or false. You have to give a complete proof that your answer is correct!

a) Let $L \subset \{0,1\}^*$ be a decidable language with infinitely many elements. Then there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that for all words $w \in L$ with $|w| \geq n$ the following is true:

   There are $x, y, z \in \{0,1\}^*$ with $|y| \geq 1$ satisfying $w = xyz$ and for all $k \in \mathbb{N}$ it is $xy^kz \in L$.

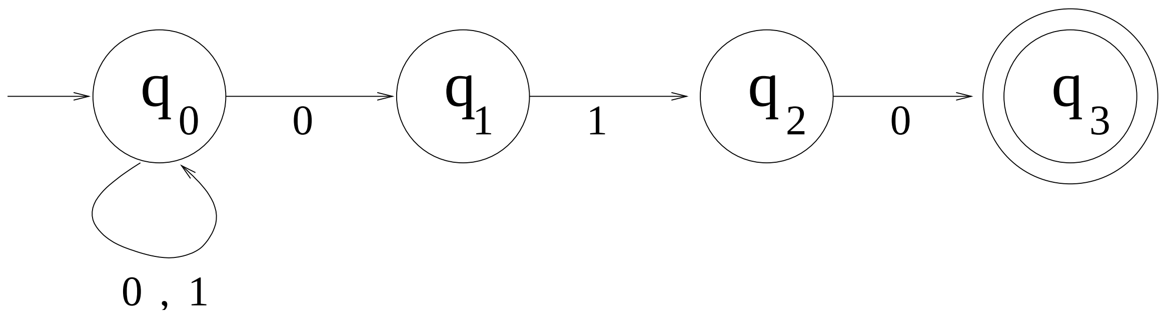
b) The following problem is decidable: Given an encoding of a DFA M working over alphabet Σ and a DFA N working over all alphabet Γ which contains all letters necessary to encode M, the DFA N accepts the description of M.

c) Let L be a contextfree language. Then there exist infinitely many different Turing machines which accept L.

d) Let $A_1, A_2, \ldots$ be an infinite collection of decidable languages. Then the language $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is decidable as well.

Problem 2 (20 %)

a) Transform the nondeterministic finite automaton given below into an equivalent deterministic one.



Transitions not shown in the above figure lead to a sink node.

b) Give a regular expression for the language accepted by the above automaton.

Problem 3 (10 %)

Let M be a DFA with $n \in \mathbb{N}$ many states over a finite alphabet Σ, and let s be the starting state of M.
Prove the following claim: Suppose q to be a state of M which can be reached from s by a computation of M, i.e. there exists a string $w \in \Sigma^*$ such that $(s, w) \xrightarrow{*} q$. Then there exists a string $v \in \Sigma^*$ with length $|v| \leq n - 1$ such that q can be reached from s by reading v, i.e. $(s, v) \xrightarrow{*} q$.

Problem 4 (25 %)

a) Construct a contextfree grammar G for the language

$$L := \{a^i b^j a^k | i + k \geq j;\ \ i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

b) Consider the language

$$L := \{a^i b^j | i = j^2, i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Is L contextfree? Prove your answer.

Problem 5 (10 %)

Define a function $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ as follows:

$$f(n, m) := \begin{cases} \sqrt{n \cdot m} & \text{if } n \cdot m \text{ is a square} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Is f computable by a Turing machine over $\{0, 1\}^*$ if we use a suitable encoding of N and $\mathbb{N}^2$ over $\{0, 1\}^*$? If 'yes' give an informal description of a Turing machine computing f, if 'not' give a precise argment why.

Problem 6 (15 %)

Which of the following probems are decidable, which are undecidable. In each case prove your answer.
All the inputs are supposed to be given in a suitable encoding.

a) Given two contextfree grammars G_1 and G_2, is $L(G_1) \cap L(G_2)$ a regular language?

b) Given a Turing machine M, does $L(M)$ contain a regular language as subset?

c) Given a contextfree grammar G and a Turing machine M, is the language $L(M) \cap L(G) \neq \emptyset$?

Hint for part a): You may use without proof the fact that the following problem is undecidable: Given a contextfree grammar G, is $L(G)$ regular?