Skriftlig Eksamen
Beregnelighed (DM517)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Fredag den 8. januar 2010

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater osv.) samt brug af lommeregner er tilladt. Eksamenssættet består af seks opgaver på fem nummererede sider (1-5). Fuld besvarelse er besvarelse af alle opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at den umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen (hvis dette altså er sandt!). I må gerne bruge metoder eller udvidelser af sætninger som er udledt i opgaver, der er stillet i løbet af kurset

Bemærk dog, at det ikke er tilladt at besvare et delspørgsmål, udelukkende med en henvisning til, at det følger af en af opgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

1 Opgave 1 (20%)

Lad $\#_x(w)$ være antal forekomster af tegnet x i strengen w og betragt nedenstående sprog over alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* : \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w)\}$$

Modulo operatoren mod er defineret som følger: $x \bmod y$ er resten ved division af x med y, så f.eks. er $5 \bmod 2 = 1$ og $6 \bmod 2 = 0$.

Spørgsmål a:
Lav en DFA som accepterer L_1.

Spørgsmål b:
Angiv et regulært udtryk som genererer L_1.

Spørgsmål c:
Er sproget $L_1 \cap (\Sigma^* - L_1)^*$ regulært?

2 Opgave 2 (15%)

Betragt følgende sprog over alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_2 = \{a^m a^n b^{n-1} a^{n-2} b^{n-3} \ldots a^1 : m = 0, 1, 2, \ldots \text{ og } n = 1, 3, 5, \ldots\}$$

Spørgsmål a:
Angiv for hver af nedenstående strenge om strengen er i L_2 eller ej (du behøver ikke begrunde det).

- e
- a
- aaa
- aab
- $aaabba$
- $aabba$
- $aaaabba$

Spørgsmål b:
Bevis at L_2 ikke er regulært.

3 Opgave 3 (15%)

Betragt nedenstående sprog over alfabetet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

$$L_3 = \{c^m(ab)^n c^n : m = 1, 2, 3, \ldots \text{ og } n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Spørgsmål a:
Angiv en kontekstfri grammatik for L_3.

Spørgsmål b:
Konstruér en PDA som accepterer L_3.

4 Opgave 4 (20%)

Betragt nedenstående sprog over alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$ (bemærk at potensopløftning er højreassociativ, dvs. $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z$, og at $2^0 = 1$).

$$L_4 = \{e\} \cup \{a^{2^0} b^{2^1} a^{2^2} b^{2^3} \ldots a^{2^n} : n = 0, 2, 4, \ldots\} \cup \{a^{2^0} b^{2^1} a^{2^2} b^{2^3} \ldots b^{2^n} : n = 1, 3, 5, \ldots\}$$

Spørgsmål a:
Angiv for hver af nedenstående strenge om strengen er i L_4 eller ej (du behøver ikke begrunde det).

- a
- ab
- abb
- $abbb$
- $abbaaaa$
- $abba$

Spørgsmål b:
Beskriv en Turing maskine som afgør L_4. Beskrivelsen kan være pseudokode (altså en tekstuel beskrivelse af maskinen), en overgangstabel eller et diagram, men i alle tilfælde skal det fremgå præcist og detaljeret hvad Turing maskinen gør. Det er tilladt at bruge følgende to Turing maskiner uden at beskrive hvordan de virker:

- Turing maskinen *Accept* som sletter båndets indhold og skriver 1, dvs. strengen accepteres.
- Turing maskinen *Reject* som sletter båndets indhold og skriver 0, dvs. strengen afvises.

5 Opgave 5 (5%)

Lad R_1 og R_2 være vilkårlige regulære udtryk. Findes der en algoritme som afgør om $L(R_1) = \overline{L(R_2)}$? Hvis ja, argumentér for hvorfor det er tilfældet. Hvis nej, giv et modeksempel.

6 Opgave 6 (25%)

Angiv for hvert af nedenstående sprog om det pågældende sprog er uafgørligt eller ej. For hvert sprog der er uafgørligt, bevis at det er tilfældet (du behøver ikke argumentere for at et sprog er afgørligt). Husk at $L(M)$ er sproget som Turing maskinen M semiafgør, dvs. mængden af strenge som M stopper på.

1. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M, er $L(M) = L_4$, hvor L_4 er sproget som er defineret i opgave 4?
2. Givet den universelle kodning af to Turing maskiner M_1 og M_2, er $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?
3. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M, et tegn x og et positivt heltal k, har M mindst k overgange som skriver x på båndet?
4. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M, findes der et regulært sprog L sådan at $L(M) \cap L = \emptyset$?
5. Givet den universelle kodning af to Turing maskiner M_1 og M_2, vil M_1 og M_2 begge udføre mindst 42 skridt hvis de får den tomme streng som input?

6. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M og en streng w, findes der et positivt heltal k sådan at $(w)^k \in L(M)$?