Eksamensopgaver i DM17, Januar 2003

Skriftlig Eksamen
Automatteori og Beregnelighed (DM17) Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense Universitet Lørdag, den 18. Januar 2003

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 5 nummererede sider (1–5).

Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i point. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) om automatteori accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

Opgave 1 (20 point)

Lad $\Sigma := \{a, b\}$.

a) Angiv tilstandsdiagrammet for en deterministisk endelig automat som accepterer sproget

$$L := \{awaa | w \in \Sigma^*\}.$$

b) Bevis at **enhver** deterministisk endelig automat M som accepterer sproget L i del a) **mindst** har **fire** tilstande.

Vink til b): Overvej, hvordan en potentiel DFA med tre tilstande, der accepterer L, må virke på inputstrenge af typen $a^i, i = 0, 1, 2, ...$

Opgave 2 (20 point)

Lad $\Sigma := \{a, b\}$. For et $w \in \Sigma^*$ defineres $\#_a(w)$ som antallet af a-er i w og $\#_b(w)$ som antallet af b-er i w.

Definer et sprog L ved

$$L := \{w \in \Sigma^* | \ \#_b(w) = 2^{\#_a(w)}\}.$$

For eksempel ligger ordene $abbbab$, bab , a^3b^8 i L.

Benyt pumpelemmaet til at bevise at L ikke er regulært.

Opgave 3 (20 point)

a) Angiv en kontekstfri grammatik G_1 over terminal-alfabetet $\Sigma := \{a, b, c\}$ så at

$$L(G_1) = \{a^{2n}b^{2n}c, n \in \mathbb{N}\}.$$

Forklar din konstruktion.

b) Angiv en grammatik G_2 som frembringer præcis de ord over $\Sigma = \{a, b, c\}$ som starter med et a og som har det samme antal a-er, b-er og c-er.

Forklar din konstruktion og vis en afledning af $abcbabacc$

Vink: G_2 behøver ikke være kontekstfri, det vil sige du må gerne benytte regler som har to eller flere symboler på deres venstre side.

Opgave 4 (20 point)

Lad $\Sigma := \{a, b, H\}$. Angiv en Turing-maskine M, som for ethvert input $xHy, x \in \{a,b\}^+, y \in \{a,b\}^+$ gør det følgende:

- hvis $x = y^R$ (det vil sige $x = x_1x_2\dots x_n, y = x_n\dots x_2x_1$) erstatter M alle input-symboler ved et blanksymbol $\flat$ og stopper i en sluttilstand;
- hvis $x \neq y^R$ stopper M i en sluttilstand, men båndindholdet må ikke være lig med det tomme ord e (det vil sige der skal være mindst en celle som indholder et symbol fra Σ).

Du må antage at maskinen starter i en konfiguration

$$\dots \flat\flat x_1x_2\dots x_nHy_1y_2\dots y_k\flat\flat\dots$$

med hovedet stående på x_1 $(n, k \geq 1)$.

Forklar din konstruktion, det vil sige forklar hvordan din maskine virker.

Opgave 5 (20 point)

Lad Σ være et givet endeligt alfabet med $|\Sigma| \geq 2$.

Betragt hver af de følgende påstande og find ud af, hvilke er rigtige og hvilke er forkerte.

Du skal give et præcist argument for hvert af dine svar.

a) Lad L_1, L_2 være to uafgørlige sprog over Σ. Så er sproget $L_1 \cap L_2$ uafgørligt.

b) Der eksisterer to uafgørlige sprog L_1, L_2 over Σ så at sproget $L_1 \cup L_2$ er afgørligt.

c) Sproget

$$L := \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N} \text{ så at } n^3 < 100 \cdot n\}$$

er regulært.

d) Lad $L_1 \subseteq \Sigma^*, L_2 \subseteq \Sigma^*$ være to endelige sprog (d.v.s. de indholder endelig mange elementer) med $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Der eksisterer en deterministisk endelig automat M så at

$$L_1 \subseteq L(M) \text{ og } L_2 \cap L(M) = \emptyset$$

e) Lad $L \subseteq \Sigma^*$ være et sprog så at $\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$ er endeligt. Så er $L \setminus (\bar{L})^*$ kontekstfrit.