Skriftlig Eksamen
Automatteori og Beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Fredag den 14 Januar 2000, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 5 nummererede sider (1–5). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 4 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen (hvis dette altså er sandt!). I må gerne bruge metoder eller udvidelser af sætninger som er udledt i opgaver, der er stillet i løbet af kurset (**dette gælder specielt de stærke pumpelemmaer og homomorfier**).

Bemærk dog, at det ikke er tilladt at besvare et delspørgsmål, udelukkende med en henvisning til, at det følger af en af opgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.!

OPGAVE 1 (20%)

Betragt sproget $L = \{a^i b^j c^k : i = j \text{ eller } i = k\}$

Spørgsmål a:

Angiv en kontekstfri grammatik G, for hvilken der gælder, at $L = L(G)$. Du skal begrunde, at G kan generere præcis de strenge der ligger i L.

Spørgsmål b:

Angiv en afledning af strengen $a^3 b^2 c^3$ ved hjælp af G.

Spørgsmål c:

Angiv en stakautomat M, for hvilken der gælder at $L = L(M)$. Du skal begrunde, at M accepterer præcis de strenge der ligger i L.

OPGAVE 2 (25%)

Betragt følgende sprog:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_a + \#_b + 2\#_c \equiv 0(\text{modulo } 4)\} \\
L_2 &= \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_a + \#_b = \#_c\}
\end{aligned}
$$

Her angiver $\#_a$ antallet af a'er i strengen w.

Spørgsmål a:

Vis, at L_1 er regulært ved at angive en endelig automat M for hvilken der gælder at $L(M) = L_1$. Du skal argumentere for at M accepterer præcis strengene fra L_1.

Spørgsmål b:

Bevis at L_2 ikke er regulært.

Spørgsmål c:

Bevis at L_2 er kontekstfrit.

OPGAVE 3 (30%)

Betragt følgende sprog:

$$
\begin{aligned}
L^* &= \{a^n b^{n!} : n \geq 1\} \\
L^{**} &= \{a^{n!} b^n : n \geq 1\} \\
L^{***} &= \{a^{n+n!} : n \geq 1\}
\end{aligned}
$$

Spørgsmål a:

Beskriv en polynomiel reduktion τ fra L^* til L^{**}. Du skal argumentere for at τ kan beregnes i polynomiel tid af en deterministisk turing maskine.

Spørgsmål b:

Gør rede for, at L^{***} hverken er regulært eller kontekstfrit.

Spørgsmål c:

Gør rede for, at L^* ikke er kontekstfrit. Hint: anvend en passende homomorfi.

Spørgsmål d:

Beskriv de væsentligste skridt for en turing maskine M^*, der afgør L^*.

OPGAVE 4 (25%)

En turing maskine M har egenskaben A, hvis M, når den startes på den tomme streng, stopper med båndindhold $\triangleright \sqcup dm17$.

En turing maskine M har egenskaben B, hvis M, når den startes i konfigurationen $\triangleright\underline{\sqcup}dm17$, enten vil besøge mindst 10 forskellige pladser på sit bånd (dvs i løbet af sin beregning vil gå mindst 10 skridt mod højre på båndet), eller aldrig stoppe.

Betragt følgende sprog:

$$\begin{aligned} L &= \{\text{“}M\text{”} : M \text{ stopper på strengen ‘dm17’}\} \\ L' &= \{\text{“}M\text{”} : M \text{ har egenskaben A}\} \\ L'' &= \{\text{“}M\text{”} : M \text{ har egenskaben B}\} \end{aligned}$$

Spørgsmål a:

Gør rede for, at L er uafgørligt.

Spørgsmål b:

Gør rede for, at L' er uafgørligt.

Spørgsmål c:

Gør rede for, at L'' er afgørligt ved at beskrive de væsentligste skridt i en turing maskine M'', der afgør L''. Du skal ikke angive M'' på diagramform.