

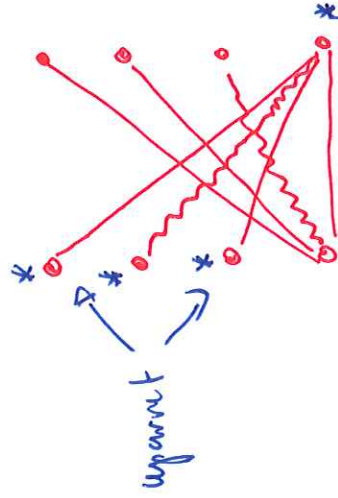
①

# Eksempel på jobblordnings algoritmen

|         | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $\alpha$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $A_1$   | 15    | 22    | 13    | (4)   | 4        |
| $A_2$   | 12    | 21    | 15    | (7)   | 7        |
| $A_3$   | 16    | 20    | 22    | (6)   | 6        |
| $A_4$   | (6)   | (11)  | (8)   | (5)   | 5        |
| $\beta$ | 1     | 6     | 3     | 0     |          |

 $\alpha_i = \text{minimum i række } i$ 
 $\beta_j = \text{minimum af}$ 
 $c_{ij} - \alpha_i \text{ i række } j$ 
 $\bigcirc = \text{celler med}$ 
 $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ 
 $\square = \text{start pærdannelse}$ 

2-delte graf svarende til  $\bigcirc$   $\sim$  = pærdannelse  
for  $\square$



markering finder ikke  
en større pærdannelse

 $I^* = \{1, 2, 3\}$  markerede  
rækker

 $J^* = \{4\}$  markerede  
spjuler

$$E = \min_{\substack{i \in I^* \\ j \notin J^*}} c_{ij} - \beta_j$$

$$= \min \{ 15-4-1, 22-4-6, 13-4-3, \\ \underline{12-7-6}, 21-7-6, 15-7-3, \\ 16-6-1, 20-6-6, 22-6-3 \} = 4$$

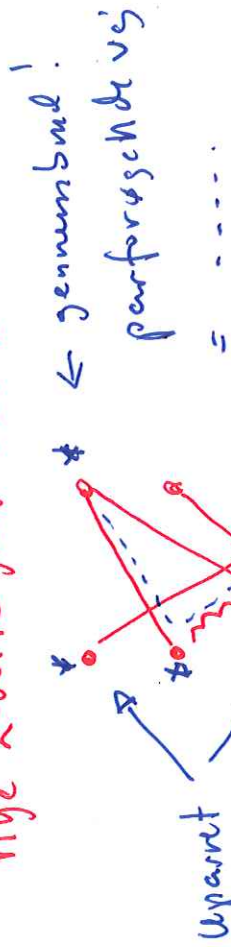
②

opdater  $\alpha$  og  $\beta$ :  $\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i + \varepsilon & i \in I^x \\ \alpha_i & i \notin I^x \end{cases}$

$\beta_j = \begin{cases} \beta_j - \varepsilon & j \in J^x \\ \beta_j & j \notin J^x \end{cases}$

|         |    | $\alpha$ |    |    |   |    |
|---------|----|----------|----|----|---|----|
|         |    | 15       | 22 | 13 | 4 | 8  |
| $\beta$ | 1  | 12       | 21 | 15 | 7 | 11 |
|         | 6  | 16       | 20 | 22 | 6 | 10 |
|         | 3  | 6        | 11 | 8  | 5 | 5  |
|         | -4 |          |    |    |   |    |

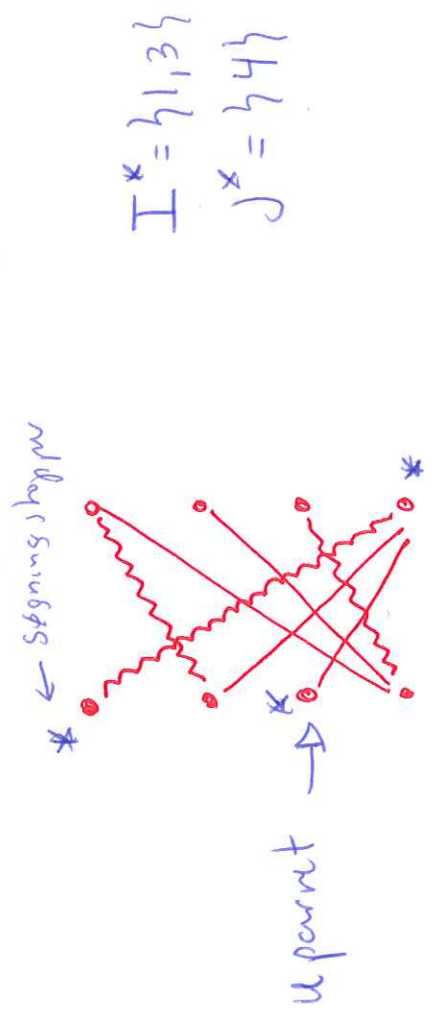
nye 2-delte græft svarende til 0



|         |    | $\alpha$ |    |    |   |    |
|---------|----|----------|----|----|---|----|
|         |    | 15       | 22 | 13 | 4 | 8  |
| $\beta$ | 1  | 12       | 21 | 15 | 7 | 11 |
|         | 6  | 16       | 20 | 22 | 6 | 10 |
|         | 3  | 6        | 11 | 8  | 5 | 5  |
|         | -4 |          |    |    |   |    |

□ = nye par dannelse

Sågnis eftu en stórra pórannsókn



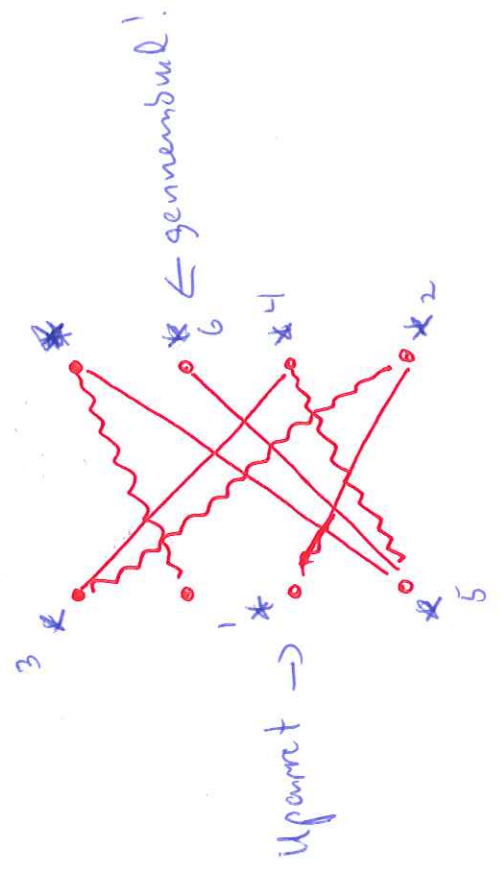
$$E = \min_{\substack{i \in I^* \\ j \notin J^*}} C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$$

$$= \min \{ 15-8-1, 22-8-6, \boxed{13-8-3}, 16-10-1, 20-10-6, 22-10-3 \} = 2$$

$\alpha$

|              |              |              |             |    |
|--------------|--------------|--------------|-------------|----|
| 15           | 22           | $\boxed{13}$ | $\boxed{7}$ | 10 |
| $\boxed{12}$ | 21           | 15           | 7           | 11 |
| 16           | 20           | 22           | $\boxed{6}$ | 12 |
| $\boxed{6}$  | $\boxed{11}$ | $\boxed{8}$  | 5           | 5  |
| 1            | 6            | 3            | -6          |    |

$\beta$



4.

Endelig pardannelse:

|         |           |           |           |               |    |
|---------|-----------|-----------|-----------|---------------|----|
|         | $\alpha$  |           |           |               |    |
|         | 15        | 22        | <u>13</u> | <del>14</del> | 10 |
|         | <u>12</u> | 21        | 15        | 7             | 11 |
|         | 16        | 20        | 22        | <u>6</u>      | 12 |
|         | <u>6</u>  | <u>11</u> | <u>8</u>  | 5             | 5  |
| $\beta$ | 1         | 6         | 3         | -6            |    |

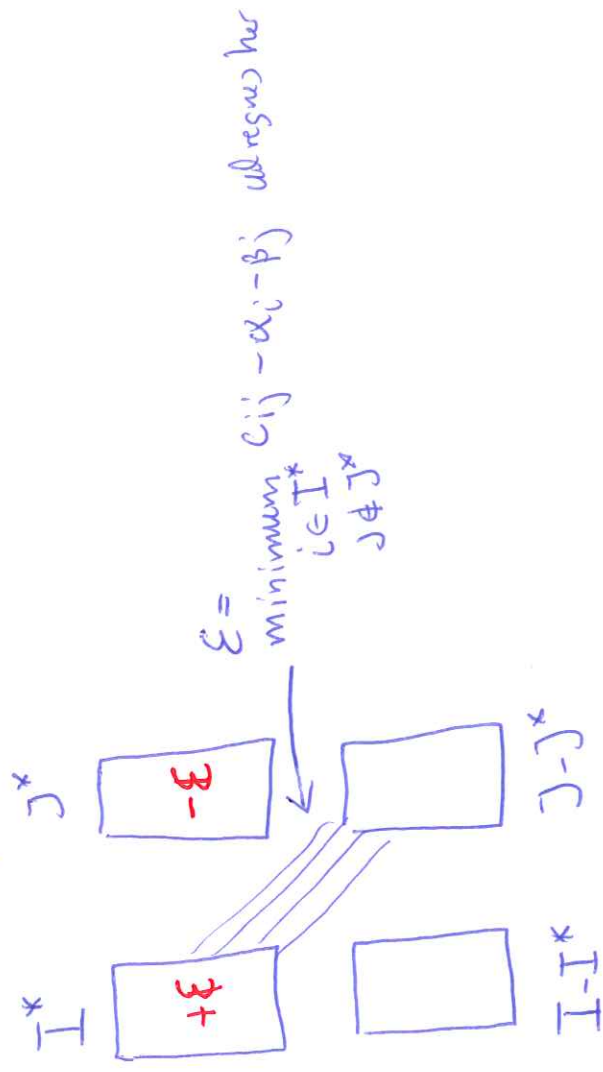
Samlet omkostning af pardannelsen

$$= 13 + 12 + 6 + 11 = 42$$

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_j = (10 + 11 + 12 + 5) + (1 + 6 + 3 - 6) = 42$$

altså pardannelsen er optimal

Påstand: Vi kan genbruge mærkerne efter opdatering af  $\alpha$  og  $\beta$ :



$i \in I^*$  for opdatering  $\Leftrightarrow i$  upvarret eller forbundet til mærket  $j$  via pardannelse, kant

$j \in J^*$  for opdatering  $\Leftrightarrow j$  forbundet til et mærket  $i$  med en kant der ikke er i pardannelse

1. Kan Kante mellem  $I-I^*$  og  $J^*$  kan forsvinde (O der) i forbindelse med opdatering

2. Der kommer mindst et punkt fra  $J-J^*$  med blandt de mærkede når  $\alpha, \beta$  opdateres og vi fortsætter mærkning

1. + 2.  $\Rightarrow$  gamle mærke kan genbruges og mindst et nyt  $j$  kan mærkes ~~opdateres~~  
 $\Rightarrow$  maks  $n$  skridt mellem hver foretaget pardannelse

## Konsekvens

1. Find optimal pardannelse i  $O(n^4)$

til ændring af  $\alpha, \beta$  kan højst

udføres  $n$  gange inden  $|P|$  vokser

og opdatering af  $\alpha, \beta$  sker ved

udregning af minimum af  ~~$\alpha_i + \beta_j$~~

højst  $n^2$  tal

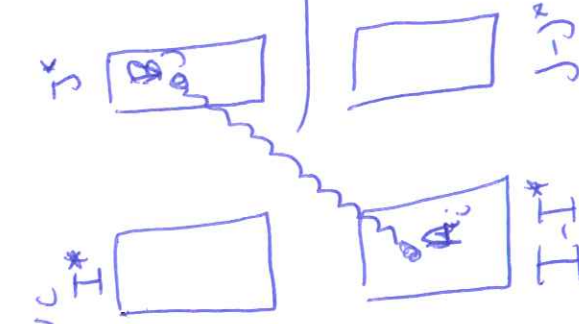
Alle pardannelses kanter i den aktuelle pardannelse forbliver

fuldstændige ( $\alpha_i = \alpha_i + \beta_j$ )

gennem hele algoritmen

Hvis ikke dette var tilfældet, ville

vi have



Ingen pardannelse  
her, da vi så ville  
kunne mærke  $A_i$