

Def en lineær homogen rekursionslign
af grad k med konstante koefficienter

$$(*) \quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$c_1, c_2, \dots, c_k$ konstanter
orden er k , da led n afhænger af
de k tidligere led lige før det n 'te.

Viser at $a_n = r^n$ er en løsning

Krav

divider
med
 r^{n-k}

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_{k-1} r + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

k grad's lign.

Kaldes den karakteristiske lign for (*)

Thm 1 antag at $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ ($\square$)
 har forsk rødder r_1 og r_2 ($r_1 \neq r_2$)
 så er $\{a_n\}$ en løsning til

$$(*) a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

$$\text{Hvis } a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

B: r_1 og r_2 rødder i ($\square$)



r_1^n er en løsn og r_2^n er løsn til (*)

Så er også $\alpha_1 r_1^n$ og $\alpha_2 r_2^n$ løsninger

$$\alpha_1 (r_1^n = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2})$$

$$\alpha_1 r_1^n = c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2})$$

antag at $a_n^{(1)} = c_1 a_{n-1}^{(1)} + c_2 a_{n-2}^{(1)}$

$$a_n^{(2)} = c_1 a_{n-1}^{(2)} + c_2 a_{n-2}^{(2)}$$

$\Downarrow$

$$a_n^{(1)} + a_n^{(2)} = c_1 (a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(2)}) + c_2 (a_{n-2}^{(1)} + a_{n-2}^{(2)})$$

så snart vi har givet verdier
for a_0 og a_1 så er

$a_2, a_3, \dots$ entydigt bestemt

$$\text{da } a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

$$\text{med } c_0 = a_0 \quad c_1 = a_1$$

skal $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ opfylde flg lign.

$$c_0 = a_0 = \alpha_1 \cdot r_1^0 + \alpha_2 \cdot r_2^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$c_1 = a_1 = \alpha_1 \cdot r_1 + \alpha_2 \cdot r_2$$

$$\text{Løsning} \quad \alpha_1 = \frac{c_1 - c_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_2 = \frac{c_0 \cdot r_1 - c_1}{r_1 - r_2}$$

Thm 2 Hvis $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

har en dobbelt rod s , så er

$$a_n \text{ en løsning} \rightarrow a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

$$\begin{aligned} \text{hviss } a_n &= \alpha_1 s^n + \alpha_2 n s^n \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 n) s^n \end{aligned}$$

B: nok at vise at s^n løsn
og $n s^n$ løsn.

s dobbelrod i $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

$$\text{dvs } (r-s)^2 = r^2 - c_1 r - c_2$$

$$r^2 - 2s \cdot r + s^2 = r^2 - c_1 r - c_2$$

$$\text{så } c_1 = 2s \quad c_2 = -s^2$$

s^n løsn:

$$\begin{aligned} & c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} \\ &= 2s \cdot s^{n-1} - s^2 \cdot s^{n-2} \\ &= s^n \end{aligned}$$

$n s^n$ løsn

$$\begin{aligned} & c_1 \cdot (n-1) s^{n-1} + c_2 (n-2) s^{n-2} \\ &= 2s(n-1) s^{n-1} - s^2 (n-2) s^{n-2} \\ &= (2n-2 - (n-2)) s^n \\ &= n s^n \end{aligned}$$

Inhomogen lineær rek. af orden k

$$(\square) \quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

påstand: hvis $a_n^{(p)}$ er en løsning til $(\square)$

Så er enhver løsning til $(\square)$ på formen

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \quad \text{hvor } a_n^{(h)} \text{ løsning til}$$

$\square$ minus $F(n)$ ledet