

Ex 2.5 Foderbl. ud 3 ingr.

U, V, W
 P P P
 30 35 20

Lav en billigst
 mulig blanding
 som overholder
 Krav for S_1, S_2

	S_1	S_2
U	2	5
V	7	5
W	5	2
	≥ 50	≥ 40

$$\min Z = 30u + 35v + 20w$$

u.a.

$$2u + 7v + 5w \geq 50$$

$$5u + 5v + 2w \geq 40$$

$$u, v, w \geq 0$$

Øvregrænser for Z

$$1. \text{ set } u=25, v=w=0 \quad Z \leq 750$$

$$2. \quad u=1, v=7, w=0 \quad Z \leq 275$$

$$\min Z = 30u + 35v + 20w$$

Primal problem P

$$(1) 2u + 7v + 5w \geq 50 \quad *x$$

$$(2) 5u + 5v + 2w \geq 40 \quad *y$$

nedre grænse

$$(1) 200 = 4 \cdot 50 \leq 8u + 28v + 20w \leq Z \text{ da } \leq \text{ for alle koeff.}$$

$$(2) 250 = 1 \cdot 50 + 5 \cdot 40 \leq 27u + 32v + 15w \leq Z$$

$$50x + 40y \leq (2x + 5y)u + (7x + 5y)v + (5x + 2y)w$$

$\leq Z$ forudsat at de 3 koefficienter
er $\leq$ dem i Z og $x, y \geq 0$

D

Dual
problem

til

$$\max Y = 50x + 40y$$

$$\text{u.a. } 2x + 5y \leq 30$$

$$7x + 5y \leq 35$$

$$5x + 2y \leq 20$$

$$x, y \geq 0$$

Get dual problem to D
or P solv!

$$D : \min (-50x - 40y)$$

$$-2x - 5y \geq -30 \quad *u$$

$$-7x - 5y \geq -35 \quad *v$$

$$-5x - 2y \geq -20 \quad *w$$

$$x, y \geq 0$$

Dual :

$$\max (-30u - 35v - 20w)$$

$$-(2u + 7v + 5w) \leq -50$$

$$-(5u + 5v + 2w) \leq -40$$

$$u, v, w \geq 0$$

||
primal !!

antag at vi har vist stærke

Dualitetssætning ($\max_i D = \min_i P$)

og lad (u_0, v_0, w_0) være opt. løsn til P

(x_0, y_0) ----- D

$$\begin{aligned} 50x_0 + 40y_0 &\leq (2u_0 + 7v_0 + 5w_0) \cdot x_0 + (5u_0 + 5v_0 + 2w_0) \cdot y_0 \\ &= (2x_0 + 5y_0)u_0 + (7x_0 + 5y_0)v_0 + (5x_0 + 2y_0)w_0 \\ &\leq 30u_0 + 35v_0 + 20w_0 \\ &= 50x_0 + 40y_0 \text{ pga Stærk dualitet} \end{aligned}$$

Konklusion (=) hele vejen

$$x_0 \neq 0 \Rightarrow 2u_0 + 7v_0 + 5w_0 \stackrel{!}{=} 50$$

$$(*) y_0 \neq 0 \Rightarrow 5u_0 + 5v_0 + 2w_0 = 40$$

$$u_0 \neq 0 \Rightarrow 2x_0 + 5y_0 = 30$$

osv

Kaldes sætningen om de
Komplementære rester.

gælder også den anden vej:

hvis (u_0, v_0, w_0) og (x_0, y_0) opfylder (*)

Så er de optimale løsninger til hhv
primale og Duale problem.

Kan også have lighedstegn i LP
problemur:

$$\text{Ex } 2u + 7v + 50w = 50$$

Konsekvens: tilsvarende dual
variabel er ikke fortegn begrænset!

<u>Primale</u>		<u>Duale</u>
1. variabel ≥ 0	$\leftrightarrow$	ulighed
2. ubegrænset variabel	$\leftrightarrow$	lighed
3. ulighed	$\leftrightarrow$	variabel ≥ 0
4. lighed	$\leftrightarrow$	ubegr. var.

Gælder ikke altid at der
 findes optimale løsn. til
 både primale og Duale.

$$\text{ex } \min 100 - x$$

$$P \quad \text{u.a. } x \geq 50 \quad \text{u} \\ x \geq 0$$

$$\max 50u$$

$$D \quad u \leq -1 \quad \text{ingen løsn} \\ u \geq 0 \quad \text{til D.}$$

Sætning 2.6 For de duale problemer

$$\min \sum b_j y_j$$

$$P: \begin{aligned} & a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_j \geq c_j \quad j \in R \\ & a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_j = c_j \quad j \in F \\ & y_i \geq 0 \quad i \in I \quad y_i \text{ ubegr.} \quad i \in K \end{aligned}$$

$$D: \max \sum c_i x_i$$

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i \in I \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i \in K \\ & x_j \geq 0 \quad j \in R \quad x_j \text{ ubegr.} \quad j \in F \end{aligned}$$

gælder (a) $\forall$ brugbare løsn $(y_1, y_2, \dots, y_m)$
 hhv $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ til P hhv D

$$\sum c_i x_i \leq \sum b_j y_j$$

og hvis begge har brugbare løsn,

$$\text{Så er } \max \sum c_i x_i = \min \sum b_j y_j$$

Ex 2.6

P

$$z = \min 30u + 35v + 20w$$

$$2u + 7v + 5w \geq 50$$

$$5u + 5v + 2w \geq 40$$

$$u, v, w \geq 0$$

$$(u_0, v_0, w_0) = \left(\frac{6}{5}, \frac{34}{5}, 0 \right)$$

$$\text{given } z = 274$$

$$(x_0, y_0) = \left(1, \frac{28}{5} \right)$$

$$\text{given } z = 274$$

D

$$y = \max 50x + 40y$$

$$2x + 5y \leq 30$$

$$7x + 5y \leq 35$$

$$5x + 2y \leq 20$$

$$x, y \geq 0$$

Job tilordning heltalsmodel

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \cdot x_{ij}$$



$$\text{hfa} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \downarrow \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1$$

$x_{ij}=1 \in \text{kanti}$
 pard
 $\forall i \in I, j \in J$

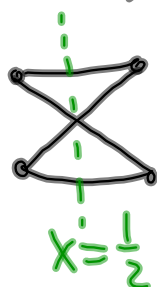
så her vi et LP problem.

$$Z_{LP} = \min \sum c_{ij} x_{ij}$$

$$P \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad \alpha$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \beta$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall ij$$



$$Z_{LP} = \max \sum \alpha_i + \sum \beta_j$$

u.f.a

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \quad \forall ij$$

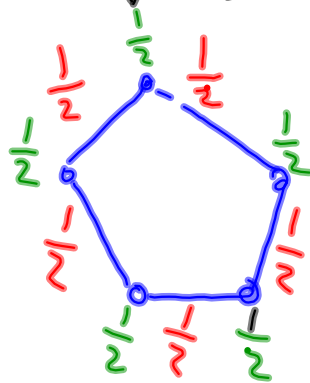
α_i, β_j unbegr.

(da =) $\uparrow$
agreed

$$\gamma \leq \gamma_{LP} = Z_{LP} \leq Z = \gamma$$

viste vi $7/3$

så optimale løsning til
jobtilordn. også optimale
for LP versionen.



opt pard = 2
min punktdekk = 3

rød viser at $LP_{opt} = \frac{5}{2}$

og
grøn viser at $Dual_{LP}^{opt} = \frac{5}{2}$

