INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI

Skriftlig eksamen

D M 2 2

Fredag den 6. juni 2003 kl. 9.00 – 13.00

Opgavesættet består af 3 sider inklusive denne forside, og indeholder 4 opgaver. Opgaverne vægtes på følgende måde:

Opgave 1:	25 %
Opgave 2:	25 %
Opgave 3:	25 %
Opgave 4:	25 %

Det bemærkes at spørgsmålene indenfor de enkelte opgaver ikke nødvendigvis vægtes lige meget.

Alle skriftlige hjælpemidler samt brug af lommeregner er tilladt. Der må gerne henvises til resultater fra lærebøgerne, men henvisninger til andre bøger er ikke acceptable som led i besvarelsen.

Opgave 1 (25 % ∼ 60 minutter)

En kædebrøk er et rationalt tal på formen:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

hvor $a_0, a_1, \cdots, a_n$ er heltal, $a_i \neq 0$ for $i > 0$, forkortet betegnet ved $\frac{p}{q} = [a_0/a_1/\cdots/a_n]$. Lad de rationale tal (konvergenter) $\frac{p_i}{q_i}$ være defineret ved $\frac{p_i}{q_i} = [a_0/a_1/\cdots/a_i]$ for $i = 0, 1, \cdots, n$. Disse udgør gradvist forbedrede approksimationer til $\frac{p}{q}$.

1.a Vis ved induktion at med $p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, q_{-2} = 1$, og $q_{-1} = 0$, gælder der for $i = 0, 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2}, \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \end{aligned}$$

eller skrevet på matrix form:

$$\left\{ \begin{array}{cc} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\}.$$

(Vink: Benyt identiteten $\frac{p_i}{q_i} = [a_0/a_1/\cdots/a_i/a_{i+1}] = [a_0/a_1/\cdots/a_i + \frac{1}{a_{i+1}}]$.)

1.b Skriv en Haskell funktion med signaturen

```
convergent :: [Int] -> [(Int,Int)]
```

som afbilder listen `[`a_0`, ` a_1`,...]` over i listen `[(`p_0, q_0`), (`p_1, q_1`),...]`.

1.c Skriv en Haskell funktion med signaturen

```
contFrac :: (Int,Int) -> [Int]
```

som afbilder det rationale tal $\frac{p}{q}$ for $q > 0$ over i kædebrøken $[a_0/a_1/\cdots/a_n]$, således at $a_i \geq 1$ for $0 < i < n$ og $a_n \geq 2$. (Bemærk dog at a_0 kan være nul og negativ) (Vink: Algoritmen til at finde a'erne svarer til GCD-algoritmen)

Opgave 2 (25 % ∼ 60 minutter)

Flettesortering af en liste foregår efter "del-og hersk" metoden ved at dele listen i to (evt. næsten) lige store dele, rekursivt sorteres så hver af disse, og dernæst "flettes" disse sammen til en enkelt sorteret liste.

2.a Skriv et Prolog program der foretager flettesortering.

2.b Hvad er tidskompleksiteten af dit program, som funktion af antallet af elementer i listen, idet der opgøres antal prædikatkald?

Opgave 3 (25 % ~ 60 minutter)

3.a: Angiv den mest generelle signatur (type) og forklar funktionaliteten af den følgende Haskell-funktion.

```
pt  p xs  = foldr s ([],[]) xs
                where s x (ts,fs) | p x       = (x:ts,fs)
                                  | otherwise = (ts,x:fs)
```

Til beregning af x^n for heltallig n er der en simpel algoritme direkte afledt af definitionen:

```
powS :: Float -> Int-> Float
powS x n
    | n <  0         = 1/powS x (-n)
    | n == 0         = 1
    |otherwise       = x * powS x (n-1)
```

Men der er også en bedre:

```
pow :: Float -> Int-> Float
pow x n
    | n <  0           = 1/pow x (-n)
    | n == 0           = 1
    | n `mod` 2 == 0   = square (pow x (n `div` 2))
    | otherwise        = x * square (pow x ((n-1) `div` 2))
                         where square x = x * x
```

3.b: Giv en argumenteret vurdering af tids- og pladskompleksiteterne af de to algoritmer.

3.c: Bevis korrektheden af programmet `pow`.

Opgave 4 (25 % ~ 60 minutter)

4.a Skriv et Prolog prædikat `between(X,Y,Z)` der udtrykker relationen $X \leq Y \leq Z$ for `X`, `Y` og `Z` instantierede, og således at fx. kaldet `between(1,Y,10)` for `Y` ikke-instantieret genererer alle heltallene mellem 1 og 10. Det er vigtigt at prædikatet ikke kan gå i uendelig løkke.

4.b Find en "most general unifier" for hvert af følgende par af prædikater, såfremt en sådan eksisterer:

1: $f(X, Y)$ og $f(g(Y), h(Z))$,

2: $f(X, X)$ og $f(Y, g(Y))$,

3: $p(X, g(X), h(Y))$ og $p(g(Y), Z, h(a))$.

4.c Reducer følgende logiske udtryk i sædvanlig prædikatnotation:

$$\forall X(\forall Z(s(X,Z) \Rightarrow (m(X) \vee \exists Y(n(X,Y) \wedge m(Y)))))$$

til konjunktiv normalform og videre til clausal normalform, idet alle skridt dokumenteres.

Opgavesættet slutter her