Løsningsforslag til udfordringen på Ugeseddel 3

Algoritme:

$i \leftarrow 1, j \leftarrow n$
while $A[i] + A[j] \neq x$ and $i < j + 1$
  if $A[i] + A[j] < x$
    $i \leftarrow i + 1$
  else
    $j \leftarrow j - 1$
return $(A[i] + A[j] = x)$

Korrekthed:

Løkke-invarianten siger, at ingen af de tal, vi er "spolet hen over" kan indgå i den ønskede sum. Mere formelt indeholder løkke-invarianten to punkter:

$I1$ $\forall k \leq i - 1 \colon \forall \ell \colon A[k] + A[\ell] \neq x$.

$I2$ $\forall k \geq j + 1 \colon \forall \ell \colon A[k] + A[\ell] \neq x$.

Løkke-invarianten bevises som sædvanlig vha. induktion over #gennemløb.

Basis: Lige før første gennemløb er $i = 1$ og $j = n$. I dette tilfælde er inv. trivielt opfyldt (intervallerne $1..i-1$ og $j+1..n$ er tomme).

Induktionsskridt: Lad i' og j' være værdierne af i og j i forrige gennemløb af løkken. Induktionsantagelsen er da

$I1'$ $\forall k \leq i' - 1 \colon \forall \ell \colon A[k] + A[\ell] \neq x$.

$I2'$ $\forall k \geq j' + 1 \colon \forall \ell \colon A[k] + A[\ell] \neq x$.

Der er to muligheder:

1. $\underline{A[i'] + A[j'] < x, \quad i = i' + 1 \quad \text{og} \quad j = j'}$
   Bemærk, at $A[i'] + A[j'] < x$ medfører, at

   $$A[i'] + A[k] < x \text{ for alle } k \leq j',$$

   da A er sorteret. Af $I2'$ følger desuden

   $$A[i'] + A[k] \neq x \text{ for alle } k \geq j' + 1.$$

   Dvs. $A[i'] + A[k] \neq x$ for alle k. Ved at kombinere dette med $I1'$ og indsætte $i = i' + 1$, får vi netop $I1$.

   $j = j'$ kombineret med $I2'$ giver selvfølgelig $I2$.

2. $\underline{A[i'] + A[j'] > x, \quad i = i' \quad \text{og} \quad j = j' - 1}$
   Beviset for dette tilfælde er analogt til beviset for tilfælde 1.

Nu har vi bevist løkke-invarianten og kan bruge den til at vise, at det, som algoritmen returnerer, er det korrekte svar.

Hvis $A[i] + A[j] = x$ gælder, når løkken slutter, returneres sand, og dette er det rigtige svar.

Ellers returneres falsk. I dette tilfælde er $i = j + 1$, når løkken slutter. Indsætter vi dette i løkke-invarianten, får vi

- $\forall k \leq j\colon \forall \ell\colon\ A[k] + A[\ell] \neq x.$
- $\forall k \geq j + 1\colon \forall \ell\colon\ A[k] + A[\ell] \neq x.$

Der findes altså intet tal i A, som sammenlagt med et andet tal i A giver x, så falsk er det rigtige svar i dette tilfælde.

Køretid:

I starten er $i = 1$ og $j = n$. I hvert gennemløb af løkken inkrementeres i, eller j dekrementeres, og løkken slutter senest når $i = j + 1$. Dermed gennemløbes løkken højst $n - 2$ gange, og hvert gennemløb tager $O(1)$ tid. Dvs. den samlede køretid er $O(n)$. Hermed har vi også argumenteret for, at algoritmen terminerer.