De vigtigste ingredienser i en løsning til udfordringen på Ugeseddel 2

Mængden M beskriver de "brøkdele af svensk", man kan være. Hvis ens mor er x svensker, og ens far er y svensker, er man nemlig selv $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ svensker. Det hele starter på et tidspunkt med et forældrepar, som hver især er enten helt svensker eller slet ikke svensker.

D.v.s. for at bevise, at Karl Andersson lyver, skal vi bevise, at $\frac{1}{3} \notin M$.

Påstand: For enhver person A eksisterer der ikke-negative heltal n og i, så A er præcis $\frac{n}{2^i}$ svensker.

Bevis: Ved strukturel induktion.

Basis: $0 = \dfrac{0}{2^0}$ og $1 = \dfrac{1}{2^0}$ (f.eks.).

Induktionsskridt: Se på en vilkårlig person A. Induktionsantagelsen siger, at der eksisterer ikke-negative heltal i, j, n, m, så A's forældre er henholdsvis $\frac{n}{2^i}$ og $\frac{m}{2^j}$ svensker.

Dermed er A $\dfrac{n}{2^{i+1}} + \dfrac{m}{2^{j+1}} = \dfrac{n \cdot 2^{j+1} + m \cdot 2^{i+1}}{2^{i+j+2}} = \dfrac{n \cdot 2^j + m \cdot 2^i}{2^{i+j+1}}$ svensker. $\square$

Hvis Karl Andersson er præcis en tredjedel svensker, findes der altså ikke-negative heltal ℓ og k, så $\frac{k}{2^\ell} = \frac{1}{3}$. D.v.s. $3k = 2^\ell$, hvilket betyder, at 3 går op i 2^ℓ. Men det kan ikke lade sig gøre, for kun 2-potenser går op i 2^ℓ.