

Beris-metoder (Afsnit 1.8)

Hovedtyper:

- Direkte beris

Benyttes, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

- Kontraposition

Benyttes, at $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

- Modstrid

Benyttes, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

Serwe:

- Induktionsbeviser

$$\text{Eks: } 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Om lidt kommer nogle eksempler.

I kommer til at se mange flere i løbet af kurset, og der er mange flere i afsnit 1.8.

Def 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:

$$n \text{ lige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$$

$$n \text{ ulige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$$

• To heltal har samme paritet, hvis begge er lige eller begge er ulige.

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Bevis: Direkte bevis

Def. 1 $\Updownarrow$ n ulige

$$\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$$

$\Downarrow$
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$

Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 ulige

□

Eks 8: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Direkte bevis ser ikke ud til at fungere:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \pm \underbrace{\sqrt{2k+1}}_{\text{lige eller ulige??}}$$

Bevis: Kontraposition

$$\Updownarrow \neg(n \text{ ulige})$$

$$\Updownarrow n \text{ lige}$$

Def. 1 $\Updownarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$

$$\Downarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$$

Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 lige

$$\Updownarrow \neg(n^2 \text{ ulige})$$

□

Eks 1 og 8 tilsammen viser, at

$\forall n \in \mathbb{Z}: n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige}$

Eks: Der findes intet største heltal

Bevis:

Antag til modstrid, at der findes et største heltal n .

Tallet $n+1$ er også et heltal, og $n+1 > n \nrightarrow \square$

Ydrligere "tricks": (Afsnit 1.9)

Split op

Eks: (flere tilfælde)

Påstand: $\forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$

NB: $\lfloor \rfloor$ runds ned
 $\lceil \rceil$ runds op

Bevis:

Tilfælde 1: n ulige

I dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

I dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

Eks: (delresultater)

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$, som i Eks 1+8

$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1)$ kan bruges i
opg. 41 til næste
uge

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, vender vi tilbage til i
næste uge

Eksistensbevis

Eks 18: Kan man dække et skakbræt med dominobrikker?

Skakbræt: 8×8 felter

Dominobrik: dækker præcis to felter

Ingen brikker må overlappe eller stikke ud over kanten af brættet

Ja: man kan dække hvor rækker med fire brikker

Konstruktivt eksistensbevis:

Vi beviser, at der findes en gyldig dækning af brættet, ved at beskrive en konkret dækning.

Eks: Har $f(x) = x^4 - x^2 - 3$ et nulpunkt?

Ja, fordi $f(0) = -3 < 0$ og

$$f(2) = 16 - 4 - 3 = 9 > 0$$

Ikke-konstruktivt eksistensbevis:

Vi har ikke fundet 0-punktet, men vi har beviset, at det eksisterer.

Eksisterer der en unik løsning til $f(x) = 0$?

Nej, der er også et nulpunkt nl. -2 og 0 .

Lidt sjovere eksempel: Eks 12

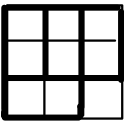
Tilbage til skakbræt, dominobrikker og „tricks“...

Start med simple specielle tilfælde for at opnå forståelse

Lad $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

? Kan et $n \times n$ skakbræt dækkes af dominobrikker,
uanset hvad n er?

! $n=2$:  Ja

$n=3$:  Nej, vi får brug for en halv brik

n ulige $\Rightarrow n \times n$ ulige

$\times$ dominobrikker dækker $2 \times$ felter,
d.v.s. et lige antal felter.

D.v.s.

n ulige: Nej

n lige: Ja
Dæk hver række med $\frac{n}{2}$ brikker

? Hvad hvis man fjerner to modstående hjørner?

! n ulige: Nej, da $n-2$ ulige

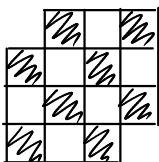
$n=2$: 

n lige: Nej:

- Man fjerner 2 hvide felter

D.v.s. $\# \text{ sorte} = \# \text{ hvide} + 2$

- Hver brik dækker et sort og et hvidt felt.

$n=4$: 

Lidt terminology:

Sætning (theorem): Vigtigt udsagn
(som er bevist at være sandt -
ellers er det bare en påstand (conjecture))

Lemma: Hjælpe-sætning
Bruges til at strukturere et langt bevis.

Korollar: Følge-sætning.
Udsagn, som følger umiddelbart af en sætning.

Nogle gange bruger man også:

Proposition: Mindre vigtigt udsagn