

Afsnit 1.6: Regler for logiske slutninger

Nogenlunde lige ud ad landevejen.

Læs det igennem, og check, at du forstår det.

Stil gerne spørgsmål!

Eks:

Hvis det regner, bliver vi inde

Det regner

$\therefore$ Vi bliver inde

↑
„Derfor“ / „Altså“

(Konklusion)

Svarer til:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \end{array}$$

Modus ponens
Tabel 1, s. 66

Læs selv resten
af tabellen.

$$\therefore q$$

„Eks 10“ (fjølslutninger).

Hvis du løser alle øvelsesopgaver, består du eksamen
Du bestod eksamen

$\therefore$ Du løste alle øvelsesopgaver $\%.$

Svarer til

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \end{array}$$

$\therefore p$ $\%.$

„Eks 11“ (fjølslutninger):

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \neg q$ $\%.$

Eks:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \end{array}$$

Modus tollens

$\therefore \neg p$

Beris-metoder (Afsnit 1.8)

Hovedtyper:

(Om lidt kommer nogle eksempler.)

I kommer til at se mange flere i løbet af kurset, og der er mange flere i afsnit 1.8.)

- **Direkte beris**

Benyttes, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

regn bliver inde kakao

- **Kontraposition**

Benyttes, at $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

regn inde ude $\therefore$ regn

- **Modstrid**

Benyttes, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

≤ 5 forelæsninger i alt ≥ 2 forelæsninger på samme ugedag

I næste uge

- **Induktionsbeviser**

Eks: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

I de første eks. skal vi bruge flg. def.:

Def 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:

$$n \text{ lige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$$

$$n \text{ ulige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$$

Two heltal har samme paritet, hvis begge er lige eller begge er ulige.

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Beris: Direkte beris

Def. 1 $\Updownarrow$ n ulige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 ulige □

Eks 8: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Direkte beris ser ikke ud til at fungere:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \pm \sqrt{2k+1}$$

lige eller ulige??

Beris: Kontraposition

Viser, at n lige $\Rightarrow n^2$ lige:

Def. 1 $\Updownarrow$ n lige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 lige □

Eks 1 og 8 tilsammen viser, at

$\forall n \in \mathbb{Z}: n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige}$

Eks: Der findes intet største heltal

Bevis:

Antag til **modstrid**, at der findes et største heltal n .

Da er $n+1$ ikke et heltal $\downarrow$ □

Ydrligere "tricks": (Afsnit 1.9)

Split op

Eks: (delresultater)

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$, som i Eks 1+8

$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1)$ kan bruges i
ops. 21 til næste
uge

$A = B \Leftrightarrow A \leq B \wedge B \leq A$ vender vi tilbage til
om et par uger

Eks: (flere tilfælde)

Påstand: $\forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$

NB: $\lfloor \rfloor$ rund ned
 $\lceil \rceil$ rund op

Bevis:

Tilfælde 1: n ulige

| dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

| dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

Eksistensbevis

Eks 18: Kan man dække et skakbræt med dominobrikker?

Skakbræt: 8×8 felter

Dominobrik: dækker præcis to felter

Ingen brikker må overlappe eller stikke ud over kanten af brættet

Ja: man kan dække hvor rækker med fire brikker

Konstruktiv eksistensbevis:

Vi beviser, at der findes en gyldig dækning af brættet, ved at beskrive en konkret dækning.

Eks: Har $f(x) = x^4 - x^2 - 3$ et nulpunkt?

Ja, fordi $f(0) = -3 < 0$ og
 $f(2) = 16 - 4 - 3 = 9 > 0$

Ikke-konstruktiv eksistensbevis:

Vi har ikke fundet 0-punktet, men vi har beviset, at det eksisterer.

Eksisterer der en unik løsning til $f(x) = 0$?

Nej, der er også et nulpunkt nl. -2 og 0 .

Lidt sjovere eksempel: Eks 12

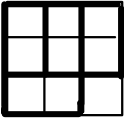
Tilbage til skakbræt, dominobrikker og „tricks“...

Start med simple specielle tilfælde for at opnå forståelse

Lad $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

Kan et $n \times n$ skakbræt dækkes af dominobrikker?

$n=2$:  Ja

$n=3$:  Nej, vi får brug for en halv brik

n ulige $\Rightarrow n \times n$ ulige

x dominobrikker dækker $2x$ felter,
d.v.s. et lige antal felter.

D.v.s.

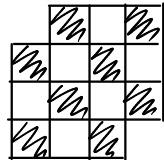
n ulige: Nej

n lige: Ja
Dæk hver række med $\frac{n}{2}$ brikker

Hvad hvis man fjerner to modstående hjørner?

n ulige: Nej, da $n-2$ ulige

$n=2$: 

$n=4$: 

n lige: Nej:

- Man fjerner 2 hvide felter

D.v.s. $\# \text{ sorte} = \# \text{ hvide} + 2$

- Hver brik dækker et sort og et hvidt felt.