

Stærk induktion (Afsnit 5.2) :

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller
D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\begin{array}{rcl} n=4 & = & 2 \cdot \textcircled{2} + 5 \cdot 0 \\ n=5 & = & 2 \cdot \textcircled{0} + 5 \cdot 1 \\ n=6 & = & 2 \cdot \textcircled{3} + 5 \cdot 0 \\ n=7 & = & 2 \cdot \textcircled{1} + 5 \cdot 1 \\ n=8 & = & 2 \cdot \textcircled{4} + 5 \cdot 0 \\ & & \vdots \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \textcircled{2} \xrightarrow{+1} \textcircled{3} \xrightarrow{+1} \textcircled{4} \\ \textcircled{0} \xrightarrow{+1} \textcircled{1} \end{array} \right\} \text{Basis}$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$$

Brug en mere general formulering af induktions-
princippet:

Stærk induktion:

Basis $P(n)$, $n \geq k$

- Basis $P(k), P(k+1), \dots, P(l)$, $l \geq k$ (Basis)
- Basis $\underbrace{(P(k) \wedge \dots \wedge P(n-1))}_{\text{Induktionsantagelse}} \Rightarrow P(n)$, $n \geq l+1$ (Induktions-
skridt)

(eller basis $(P(k) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$, $n \geq l$)

Eks overfor: $k=4$, $l=5$

Ind. ant:

$$\forall k \in \{4, 5, \dots, n-1\} : \exists a, b \in \mathbb{N} : k = 2a + 5b$$

(Bruger faktisk kun, at $\exists a, b \in \mathbb{N} : \underline{n-2} = 2a + 5b$
i induktions-skridtet)

Ind. skridt: $n \geq 6$

$$n = \underbrace{(n-2)}_{\geq 4} + 2$$

$$= (2a + 5b) + 2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$

□

Bemærk, at vi har brug for både $n=4$ og $n=5$ i basis.
Hvis vi kun har $n=4$, beviser vi kun udsagnet for n lige.

Vi har vist:

- $P(4)$
- $P(5)$
- $P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$
- $\vdots$

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks: Fibonacci-tallene

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{Basis-skridt}$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \left. \right\} \text{Rekursivt skridt}$$

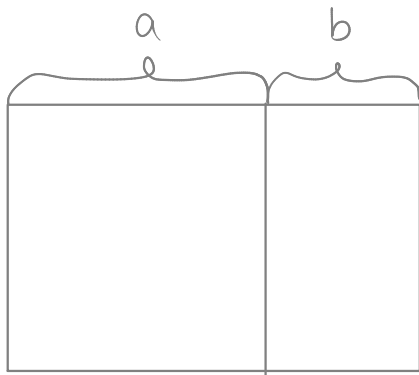
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Voks eksponentielt:

Eks 4: $f_n > \varphi^{n-2}$, $n \geq 3$, hvor

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (\text{Golden ratio})$$

Gyldne snit:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \varphi$$

φ har mange interessante egenskaber.

En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \varphi \quad (*) \end{aligned}$$

Basis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f_3 = 2 \\ \quad \varphi^{3-2} = \varphi \approx 1,618 < f_3 \quad - \text{OK!} \\ \\ \bullet f_4 = 3 \\ \quad \varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1 + \varphi \approx 2,618 < f_4 \quad - \text{OK!} \\ \\ \bullet f_5 = f_4 + f_3 \\ \quad < \varphi^2 + \varphi \quad (\text{beviset ovenfor}) \\ \quad = \varphi(\varphi + 1) \\ \quad = \varphi \cdot \varphi^2, \quad \text{iflg. (*)} \\ \quad = \varphi^3 \end{array} \right.$$

Induktionsantagelse: $f_k > \varphi^{k-2}$, $3 \leq k \leq n-1$

(Behøver faktisk kun $f_{n-1} > \varphi^{n-3}$ og $f_{n-2} > \varphi^{n-4}$ for at gennemføre induktionskridtet.)

Induktionskridt: $n \geq 5$

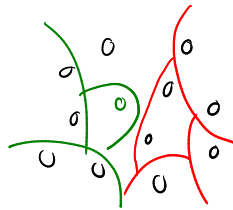
$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\ &> \varphi^{n-3} + \varphi^{n-4}, \quad \text{iflg. ind. ant.} \\ &= \varphi^{n-4}(\varphi + 1) \\ &= \varphi^{n-4} \cdot \varphi^2, \quad \text{iflg. (*)} \\ &= \varphi^{n-2} \end{aligned}$$

□

Eks: Spil med en bunke brikker

To spillere skiftes til at tage en eller to brikker.
Den, der tager den sidste brik, har tabt.

Eks:



Blå spiller taber.

- 1 brik : Spiller 2 vinder
- 2 brikker : Spiller 1 kan vinde ved at tage én brik
- 3 brikker : Spiller 1 ————— "—————" to brikker
- 4 brikker : Når Spiller 1 har taget en eller to brikker, er der 3 eller 2 brikker tilbage $\Rightarrow$ Spiller 2 kan vinde
- 5 brikker : Hvis Spiller 1 tager én brik, er der 4 brikker tilbage $\Rightarrow$ Spiller 1 kan vinde
- 6 brikker : Spiller 1 kan vinde ved at tage to brikker.

Påstand: Antag, der er n brikker

Hvis $n \bmod 3 \neq 1$, har Spiller 1 en vindende strategi.
Ellers har Spiller 2 en vindende strategi.

Basis: Ved stærk induktion over n .

Basis:

$n=1$: Spiller 1 taber.

$n=2$: Tag én brik

$n=3$: Tag to brikke

Induktionsantagelse: k brikke

For $2 \leq k \leq n-1$ gælder:

Hvis $k \bmod 3 \neq 1$, har **Spiller 1** en vindende strategi

Ellers har Spiller 2 en vindende strategi.

Induktionsskridt: $n \geq 5$

$n \bmod 3 = 0$: Tag to brikke

$n-2 \bmod 3 = 1$

Da det derefter er Spiller 2's tur,

har **Spiller 1** ifølge ind. ant. en

vindende strategi herfra.

$n \bmod 3 = 1$:

$n-1 \bmod 3 = 0$

$n-2 \bmod 3 = 2$

D.v.s uanset, om Spiller 1 tager en eller to brikke har Spiller 2 derefter en vindende strategi, ifølge ind. ant.

$n \bmod 3 = 2$: Tag én brik

Da $n-1 \bmod 3 = 1$, har Spiller 1 herefter en vindende strategi, ifølge ind. ant.