

- Computere
- Tempo

Sidste gang:

- Aktivluser (Tabel 1.3.6-8)

F.eks.:

Distributive love

De Morgans love

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

- Tautologi, modstrid, kontingens
- Kvantorer

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+x = x$$

Negering af kvantificerede udsagn:

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^f) & S \\ \Downarrow & & \\ & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x) & S \\ \Downarrow & & \\ & \exists x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & S \end{aligned}$$

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(\overbrace{\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^S) & F \\ \Downarrow & & \\ & \forall x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & F \end{aligned}$$

De Morgans Love for kvantorer: (Tabel 1.4.2, s.44)

$$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

Flere eksempler:

De Morgan for kvantorer $\Updownarrow$

$$\neg(\exists x \in \mathbb{N} : 2^x < x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : 2^x \geq x$$

S

De Morgan for kvantorer $\Updownarrow$

$$\neg(\forall x \in \mathbb{N} : (x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x))$$

De Morgan $\Updownarrow$

$$\exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x)$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : (x+3 > 2x \wedge 2^x \geq 2x) \quad S \text{ (eks: } x=1)$$

De Morgan for kvantorer $\Updownarrow$

$$\neg(\forall x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x))$$

Tabel 7 $\Updownarrow$

$$\exists x \in \mathbb{N} : \neg(x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)$$

De Morgan $\Updownarrow$

$$\exists x \in \mathbb{N} : \neg(x < 3 \vee x+3 \leq 2x)$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \wedge x+3 > 2x) \quad F$$

Indløjede kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

$$P(x,y) : x+y = 0$$

$P(2,3)$ er falsk

$P(2,-2)$ er sand

$$\uparrow \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : P(x,y)$$

Q: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

„For ethvert $x \in \mathbb{Z}$ findes der et $y \in \mathbb{Z}$, sådan at $x+y=0$ “

Er sandt, hvis følgende er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x+y=0$$

S (sæt $y=-x$)

D.v.s. y må gerne afhænge af x .

Kan skrives mere præcist:

R: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Har kvantorenes orden betydning? ja:

S: $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ F

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Ethvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x+y = 0$$

S er stærkere end Q :

$$S \Rightarrow Q$$

$$\neg(Q \Rightarrow S)$$

$$P_1(x): x > 10$$

$$P_2(x): x > 20$$

P_2 er stærkere end P_1

| Q kan man vælge et nyt y for hvert x

| S skal der være et y , der "virker" for alle x .

Eks:

S : Mgd. af stud. i dette lokale

H : Mgd. af hobbies

$P(x, y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$$\forall x \in S: \exists y \in H: P(x, y)$$

$$\exists y \in H: \forall x \in S: P(x, y)$$

Der findes en hobby, som alle studerende i dette lokale har.

Flere eksempler:

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x > y$$

F

(eks: $y = x$)

$$\forall y \in \mathbb{Z}: \exists x \in \mathbb{Z}: x > y$$

S

(eks: $x = y + 1$)

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}^-: x > y$$

S

(eks: $x = 0$)

Eks (negation):

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \neg(\forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$$

Eks (ens kvantorer):

"går op i"

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \quad S \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \end{aligned}$$

Når kvantorerne er ens, må man gerne ændre rækkefølgen.
Her skal udsagnet f.eks. gælde for alle per $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

S Eks: $x=1, y=1$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

(Læs Tabel 1, s. 56)

Eks (tre konstanter):

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

S

$$\text{Eks: } y = x$$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z$$

Kan man bytte om på de to $\forall$ i dette udtryk?

Nej:

$$\forall z \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad \text{F (Eks: } x = z \cdot y + 1 \text{)}$$

Regler for logiske slutninger (afsnit 1.6)

Nogenlunde lige ud ad landevejen.

Læs det igennem, og check, at du forstår det.

Stil gerne spørgsmål!

Eks:

Hvis det regner, bliver vi inde

Det regner

$\therefore$ Vi bliver inde

↑
„Derfor“ / „Altså“

(Konklusion)

Svarer til:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \end{array}$$

Modus ponens
Tabel 1, s. 66

Læs selv resten
af tabellen.

$$\therefore q$$

„Eks 10“ (fjlslutninger).

Hvis du løser alle øvelsesopgaver, består du eksamen
Du bestod eksamen

$\therefore$ Du løste alle øvelsesopgaver $\nexists$.

Svarer til

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \end{array}$$

$\therefore p$ $\nexists$.

p er en tilstrækkelig, men ikke nødvendig betingelse for q .

„Eks 11“ (fjlslutninger):

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \neg q$ $\nexists$.

Eks:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \end{array}$$

Modus tollens

$\therefore \neg p$

Bevis-metoder (Afsnit 1.8)

Hovedtyper :

- Direkte bevis

Benyttes, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

- Kontraposition

Benyttes, at $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

- Modstrid

Benyttes, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

I de første eks. skal vi bruge flg. def.:

Def 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:

n lige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$

n ulige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$

• To heltal har samme paritet, hvis begge er lige eller begge er ulige.

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Beris: Direkte beris

Def. 1 $\hat{=}$ n ulige

$$\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$$

$\Downarrow$

$$\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

Def. 1 $\hat{=}$ n^2 ulige

□