

Sidste gang:

- De Morgans Love for kvantorer:

$$\neg \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg \exists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

- Indlejrede kvantorer:

$$\begin{aligned} & \forall x : \exists y : P(x, y) \\ \uparrow & \quad \downarrow \\ & \exists y : \forall x : P(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg \forall x : \exists y : P(x, y) \\ \uparrow & \quad \downarrow \\ & \exists x : \forall y : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

- Regler for logiske slutninger

(Hvad kan man konkludere, og hvad kan man ikke konkludere)

$p \Rightarrow q$ medfører

hverken $q \Rightarrow p$

ellv $\neg p \Rightarrow \neg q$

men er ækv. med $\neg q \Rightarrow \neg p$

skal vi bruge i dag...

Bevismetoder (afsnit 1.8)

• Direkte bevis

$$n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Bevis, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

n ulige $\uparrow$ n^2 ulige $\uparrow$

• Kontraposition

Bevis, at $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

n lige $\uparrow$ n^2 lige $\uparrow$ n^2 ulige $\uparrow$ n ulige

• Modstrid

$$\nexists \text{ uge med } \geq 2 \text{ fødselsdage} \wedge \leq 52 \text{ personer}$$

$$\exists \text{ uge med } \geq 2 \text{ fødselsdage}$$

Bevis, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

A ridder $\wedge$ A knægt $\wedge$ A ridder $\Rightarrow$ A knægt

(Kapitel 5:)

• Induktionsbeviser

Eks: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Beris: Direkte beris

Def. 1 $\Updownarrow$ n ulige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 ulige

□

Eks 8: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Kan vi bruge et direkte beris?

$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \pm \underbrace{\sqrt{2k+1}}_{\text{lige eller ulige??}}$

Beris: Kontraposition

Viser, at $\neg(n \text{ ulige}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ ulige})$:

Def. 1 $\Updownarrow$ n lige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 lige

□

Eks 1 og 8 tilsammen viser, at

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}: (n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige})}$$

Eks: Der er to i dette lokale, som har fødselsdag
i samme uge

Ben's:

Antag til modstrid, at der ikke er en uge
med to fødselsdage.

Da er der ≤ 52 mennesker i lokalerne. ⚡

□

NB: „to fødselsdage“ betyder
„mindst to fødselsdage“.
(I modsætning til
„præcis to fødselsdage“.)

Ydroligoe „tricks“: (Afsnit 1.9)

Split op

Eks: (delresultater)

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p), \text{ som i Eks 1+8}$$

$$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1) \quad \begin{array}{l} \text{kan bruges i} \\ \text{ops. 1.8.21} \\ \text{til næste uge} \end{array}$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \begin{array}{l} \text{vender vi tilbage til} \\ \text{i næste uge} \end{array}$$

Eks: (flere tilfælde)

$$\text{Påstand: } \forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{NB: } \lfloor \rfloor \text{ rund ned} \\ \quad \lceil \rceil \text{ rund op} \end{array} \right.$$

Bevis: (to direkte beviser)

Tilfælde 1: n ulige

| dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

| dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

□

„Eks 18": Lad $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

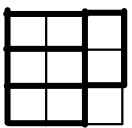
Kan et $n \times n$ skakbræt dækkes af dominobrikker?

Dominobrik: dækker præcis to felter

Ingen brikker må overlappe eller stikke ud over brættet.

Start evt. med simple special-tilfælde for at opnå forståelse:

$n=2$:  Ja

$n=3$:  Nej, vi får brug for en halv brik

n ulige: Nej, fordi:

Hver brik dækker to felter. D.v.s. tilsammen dækker brikkerne et lige # felter

Men ifølge Eks 1 er n^2 ulige

n lige: Ja:

Dæk hver række med $n/2$ brikker

Konstruktiv eksistensbevis:

Vi viser, at der findes en gyldig dækning af brættet ved at beskrive en konkret dækning.

Eks: Har $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ et nulpunkt?

Ja, fordi $f(0) = -1 < 0$ og
 $f(2) = 16 - 4 - 1 = 11 > 0$

Ikke-konstruktiv eksistensbevis:

Vi har ikke fundet 0-punktet, men vi har bevist, at det eksisterer.

Eksisterer der en unik løsning til $f(x) = 0$?

Nej, der er også et nulpunkt nl. -2 og 0 .

Lidt sjovere eksempel: Eks 12

Tilbage til skatbræt, domindbrikker og "tricks"...

Eks: $n \times n$ skakbræt

Fjern to modstående hjørner.

Kan brættet dækkes af domino-brikker?

n ulige: Nej, da $n-2$ ulige

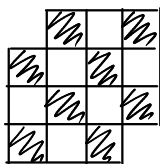
n lige: Først simple specieltilfælde:

$n=2$:



Nej

$n=4$:



Nej

Generelt:

Antag til modstrid, at brættet kan dækkes af dominobrikker.

Da har brættet lige mange sorte og hvide felter.

Men vi startede med et bræt, hvor hver række havde lige mange sorte og hvide felter, og fjernede to sorte eller to hvide felter. D.v.s. der er ikke lige mange sorte og hvide felter ↴

Uden at tegne brættet havde vi måske ikke tænkt over, at de to manglende felter har samme farve.

Lidt terminologi:

Sætning (theorem): Vigtigt udsagn
(som er bevist at være sandt -
ellers er det bare en påstand (*conjecture*))
D.v.s. et udsagn, som man ofte
refererer til.

Lemma: Hjælpe-sætning
Bruges til at strukturere et langt bevis.

Korollar: Følge-sætning.
Udsagn, som følger umiddelbart af en sætning.

Noget gange bruger man også:

Proposition: Mindre vigtigt udsagn

Induktion (Kapitel 5)

Datalogene har allerede set, hvordan induktion kan bruges til at bevise løkke-invarianter.

Bruges til at bevise parametriserede udsagn.

Eks: $\overbrace{\sum_{i=0}^n 2^i}^{P(n)} = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

D.v.s. $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

Lidt som løkke-invarianter: Hver gang vi har lagt et led mere til, er formelen igen opfyldt.

$P(0)$: $1 = 2^0 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$

$P(1)$: $1 + 2 = 3 = 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark$

$P(2)$: $1 + 2 + 4 = 7 = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1 = 8 - 1 \quad \checkmark$

$P(3)$: $1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \checkmark$

For at checke $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ og $P(3)$ kunne vi også gøre sådan:

$$n=0: 2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad \leftarrow \text{Basistilfælde}$$

$$\begin{aligned} n=1: 2^0 + 2^1 &= (2^1 - 1) + 2^1, \text{ iflg. } P(0) \\ &= 2 \cdot 2^1 - 1 \\ &= 2^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2: 2^0 + 2^1 + 2^2 &= (2^2 - 1) + 2^2, \text{ iflg. } P(1) \\ &= 2 \cdot 2^2 - 1 \\ &= 2^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 &= (2^3 - 1) + 2^3, \text{ iflg. } P(2) \\ &= 2^4 - 1 \end{aligned}$$

Vi har vist:

- $P(0)$
- $P(0) \Rightarrow P(1)$
- $P(1) \Rightarrow P(2)$
- $P(2) \Rightarrow P(3)$

På samme måde kunne vi vise

$$P(3) \Rightarrow P(4)$$

$$P(4) \Rightarrow P(5)$$

$\vdots$

Men vi bliver aldrig færdige...

Vis i std

$$P(n-1) \Rightarrow P(n), \text{ fr alle } n \geq 1$$

D.v.s. vis, at

$$\text{Ind. ant.} \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \text{ fr alle } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} & \downarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \\ & \downarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n \\ & \quad = 2 \cdot 2^n - 1 \\ & \quad = 2^{n+1} - 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \downarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \\ & \downarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n \\ & \quad = 2 \cdot 2^n - 1 \\ & \quad = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}} \right\} \text{Induktionsskridt}$$

□