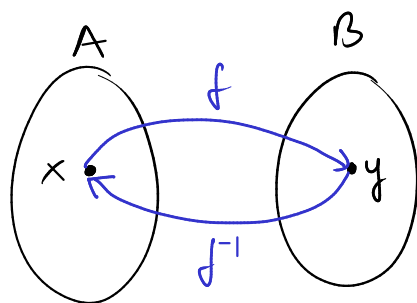


Def. 9:

Lad $f: A \rightarrow B$ være en bijektion.

Den **inverse funktion** til f er funktionen $f^{-1}: B \rightarrow A$,
som opfylder $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, for alle $x \in A$.



$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ f^{-1}(y) &= x \end{aligned}$$

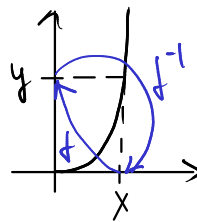
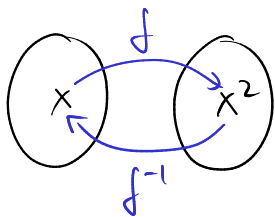
D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = x$, for alle $x \in A$,
og $f(f^{-1}(y)) = y$, for alle $y \in B$.

Eks:

$$g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad g(x) = x^2$$

$$g^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



Eks:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
 f er ikke invertibel.

Eks: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x+1$

$$y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

D.v.s. $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Check: $h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x$.

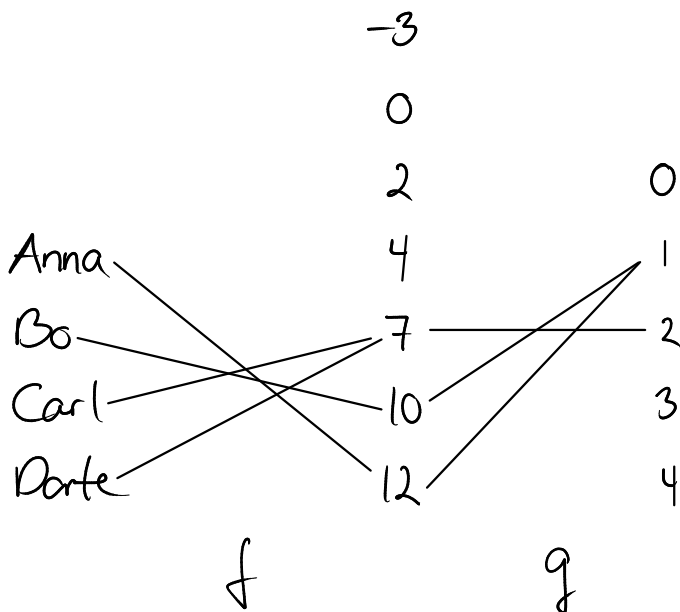
Man kan kombinere funktioner (se SoWiSo/lærebogen Def 10):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (\text{sammensat funktion})$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Eks: $f: \text{navn} \rightarrow \text{karakter}$
 $g: \text{karakter} \rightarrow \text{antal}$



Hvor mange fik samme karakter som Dorte?

$$(g \circ f)(\text{Dorte}) = g(f(\text{Dorte})) = g(12) = 5$$

Bemærk:

$f \circ g$ er ikke def.
 $(D_m(f) \neq V_m(g))$.

Funktioner kan være (se SoWiSo / lærebogen Def. 6)

(strengt) voksende

(strengt) aftagende

monoton

Stærk induktion (Afsnit 5.2) :

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller
D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\begin{array}{rcl} n=4 & = & 2 \cdot \textcircled{2} + 5 \cdot 0 \\ n=5 & = & 2 \cdot \textcircled{0} + 5 \cdot 1 \\ n=6 & = & 2 \cdot \textcircled{3} + 5 \cdot 0 \\ n=7 & = & 2 \cdot \textcircled{1} + 5 \cdot 1 \\ n=8 & = & 2 \cdot \textcircled{4} + 5 \cdot 0 \\ & & \vdots \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \textcircled{2} \xrightarrow{+1} \textcircled{3} \xrightarrow{+1} \textcircled{4} \\ \textcircled{0} \xrightarrow{+1} \textcircled{1} \end{array} \right\} \text{Basis}$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$$

Brug en mere general formulering af induktions-
princippet:

Stærk induktion:

Basis $P(n)$, $n \geq k$

- Basis $P(k), P(k+1), \dots, P(l)$, $l \geq k$ (Basis)
- Basis $\underbrace{(P(k) \wedge \dots \wedge P(n-1))}_{\text{Induktionsantagelse}} \Rightarrow P(n)$, $n \geq l+1$ (Induktions-
skridt)

(eller basis $(P(k) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$, $n \geq l$)

Eks overfor: $k=4$, $l=5$

Simple induction

$$P(k)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$$

$$P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$$

$\vdots$

Strong induction (med $k=l$)

$$P(k)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$$

$$P(k) \wedge P(k+1) \wedge P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$$

$\vdots$

Ind. ant:

$$\forall k \in \{4, 5, \dots, n-1\} : \exists a, b \in \mathbb{N} : k = 2a + 5b$$

D.v.s.

$$\exists a, b \in \mathbb{N} : \underline{n-2} = 2a + 5b, \text{ hvis } n \geq 6$$

Ind. skridt: $n \geq 6$

$$n = \underbrace{(n-2)}_{\geq 4} + 2$$

$$= (2a + 5b) + 2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$

□

Bemærk, at vi har brug for både $n=4$ og $n=5$ i basis.
Hvis vi kun har $n=4$, beviser vi kun udsagnet for n lige.

Vi har vist:

- $P(4)$

- $P(5)$

- $P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$

- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$

- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$

$\vdots$