Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks: Fibonacci-tallene

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Basis-skridt}$$

$$\left. f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \right\} \quad \text{Rekursivt skridt}$$

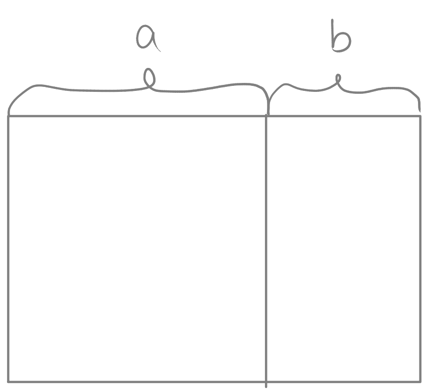
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Vokser eksponentielt:

Eks 4: $f_n > \varphi^{n-2}$, $n \geq 3$, hvor

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \qquad (\text{Golden ratio})$$

Gyldne snit:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \frac{a}{b} = \varphi$$

φ har mange interessante egenskaber.
En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 1+\varphi \qquad (*)$$

Basis

- $f_3 = 2$

  $\varphi^{3-2} = \varphi \approx 1{,}618 < f_3$ – OK!

- $f_4 = 3$

  $\varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1+\varphi \approx 2{,}618 < f_4$ – OK!

- $f_5 = f_4 + f_3$

$$
\begin{aligned}
&> \varphi^2 + \varphi \qquad \text{(bevist ovenfor)}\\
&= \varphi(\varphi+1)\\
&= \varphi \cdot \varphi^2, \qquad \text{iflg. } (*)\\
&= \varphi^3
\end{aligned}
$$

Induktionsantagelse:

$f_k > \varphi^{k-2}$, $3 \leq k \leq n-1$

D.v.s.

$f_{n-1} > \varphi^{n-3}$ og $f_{n-2} > \varphi^{n-4}$, hvis $n \geq 5$

Induktionsskridt: $n \geq 5$

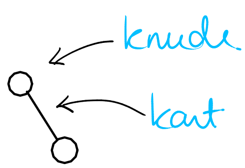
$$
\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}\\
&> \varphi^{n-3} + \varphi^{n-4}, \qquad \text{iflg. ind.ant.}\\
&= \varphi^{n-4}(\varphi+1)\\
&= \varphi^{n-4} \cdot \varphi^2, \qquad \text{iflg. } (*)\\
&= \varphi^{n-2}
\end{aligned}
$$

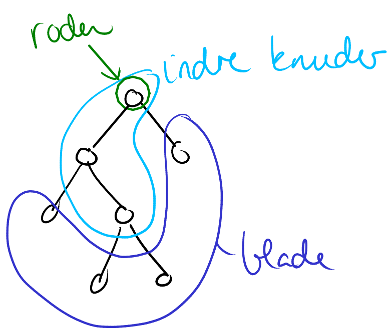
$\square$

Hvis vi lader $P(n)$ være udsagnet $f_n > \varphi^{n-2}$, svarer beviset ovenfor til at bevise:

$$P(3)$$
$$P(4)$$
$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$
$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$
$$P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$
$$\vdots$$

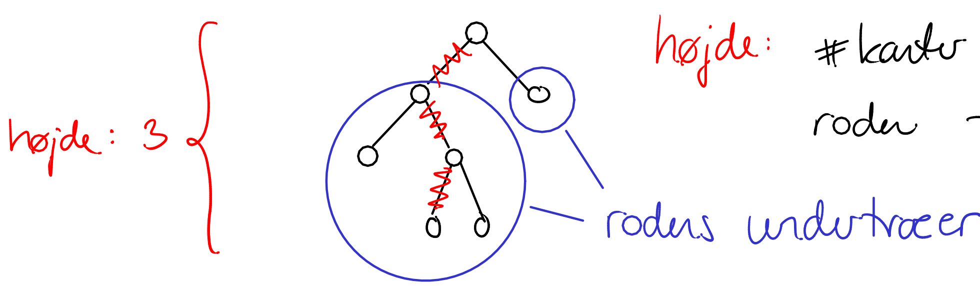
<u>Eks</u>: Fulde binære træer





indre knuder har to børn hver

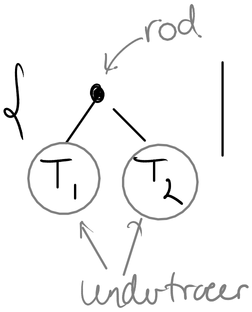
blade har ingen børn



højde: # kanter i længste sti fra roden til et blad

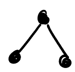
Def. 5.35: Fulde binære træer

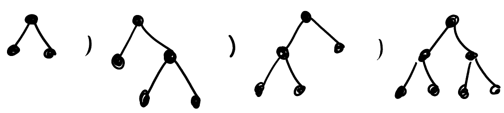
Basis-skridt: $S_0 = \{\bullet\}$

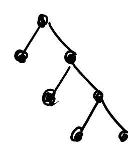
Rek. skridt: $S_n = S_{n-1} \cup \{$ 

$\mid T_1, T_2 \in S_{n-1}\}$, $n \geq 1$

D.v.s.

$S_1 = \{\bullet,$  $\}$

$S_2 = \{\bullet,$  $\}$

$S_3 = \{$ ______________ , ______________ ,  , $\dots \}$

$(|S_3| = 26)$

Strukturel induktion

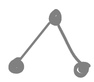
Bevis $P(S_n)$, $n \geq 0$:

- Bevis $P(S_0)$
- Bevis, at $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n)$ for alle $n \geq 1$.

Sætning 2:

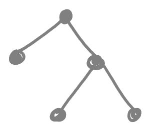
For ethvert fuldt binært træ T med $n(T)$ knuder og højde $h(T)$ gælder $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$

Eks:



$n=3$

$h=1 \Rightarrow 2^{h+1}-1 = 3$



$n=5$

$h=2 \Rightarrow 2^{h+1}-1 = 7$

Bevis: Ved strukturel induktion

Basis: $S_0 = \{\bullet\}$

$n(T) = 1$

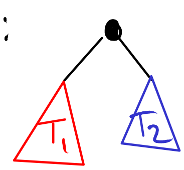
$h(T) = 0 \Rightarrow 2^{h(T)+1} - 1 = 2-1 = 1$

Ind. ant.:

$n(T) \leq 2^{h(T)+1}-1$, for alle $T \in S_{n-1}$

Ind. skridt:

T:



$T \in S_n \Rightarrow T_1, T_2 \in S_{n-1}$

Antag, at

$h(T_1) \geq h(T_2)$ $(*)$

(D.v.s. hvis det ene undertræ er højere end det andet, kalder vi det højeste undertræ T_1)

Da gælder

$$h(T) = h(T_1) + 1 \qquad (**)$$

$$\begin{aligned}
n(T) &= n(T_1) + n(T_2) + 1 \\
&\leq 2^{h(T_1)+1} - 1 + 2^{h(T_2)+1} - 1 + 1, \quad \text{ifølge ind. ant.} \\
&= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\
&\leq 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_1)+1} - 1, \quad \text{ifølge } (*) \\
&= 2 \cdot 2^{h(T_1)+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1, \quad \text{ifølge } (**) \\
&= 2^{h(T)+1} - 1
\end{aligned}$$

$\square$