

Matricer (afsnit 2.6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ rækker} \\ 3 \text{ søjler} \end{array}$$

A er en 2×3 -matrix

Matrix-regning kan bruges til at løse ligningssystemer med flere ubekendte.

Bruges også til computergrafik og meget andet.

I skal bruge dem i DM534 lige om lidt.

Vi kommer også til at bruge dem i forbindelse med relationer

Vi skal se på, hvordan man kan manipulere matricer:

addere, gange, transponere

Vi skal også se på 0/1-matricer med tilsvarende operationer.

Addition

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+1 & 4+0 \\ 1+0 & 0+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{Def. 3})$$

A og B kan lægges sammen, fordi de har samme dimensioner, men de kan ikke ganges.

Multiplikation:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3 \text{ matrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot D &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = E \quad 2 \times 3 \text{ - matrix} \end{aligned}$$

$$e_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + a_{i3}d_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}d_{kj}$$

Generelt:

$$\begin{matrix} k & \boxed{F} & \times & \textcircled{m} & \boxed{G} & = & k & \boxed{H} \\ & \textcircled{m} & & & n & & & n \end{matrix}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^m f_{ik} g_{kj} \quad (\text{Def. 4}) \quad - \quad m \text{ mult.}$$

H har $k \cdot n$ pladser
D.v.s. ialt $k \cdot m \cdot n$ mult.

D.A er ikke defineret:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A.A er heller ikke defineret.

Mw det er D.D, for D er kvadratisk,
d.v.s. $\# \text{rækker} = \# \text{søjler}$ (Def. 1)

Eks 1':

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq$$

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

D.v.s. matrix-mult. er ikke kommutativ.

Gælder der så heller ikke, at

$$D \cdot D^2 = D^2 \cdot D \quad ?$$

Jo, for matrix-mult. er assosiativ:

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$$

Neutrale matricer

$$A + O = A$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neutral matrix m.h.t. + :

$$m_{ij} = 0$$

$$A \cdot \mathbb{I}_3 = A :$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Den neutrale matrices dimensioner ligger fast:

- Med antallet af rækker sørger vi for, at den kan ganges på A .
- Med antallet af søjler sørger vi for, at resultatet har det rigtige antal søjler.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_2 \cdot A = A$$

Neutral matrix m.h.t. $\cdot$:

$$m_{ii} = 1$$

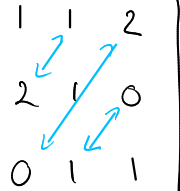
$$m_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Kaldes også en identitetsmatrix (Def. 5)

Transponering

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Byt om på rækker og søjler: $m_{ij}^t = m_{ji}$ (Def. 6)

$$D^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$


Kvadratiske matrixer: spejl omkring diagonalen

Hvis $M = M^t$, er M symmetrisk (Def. 7)

0-1-matricer

0 ~ Falsk

1 ~ Sand

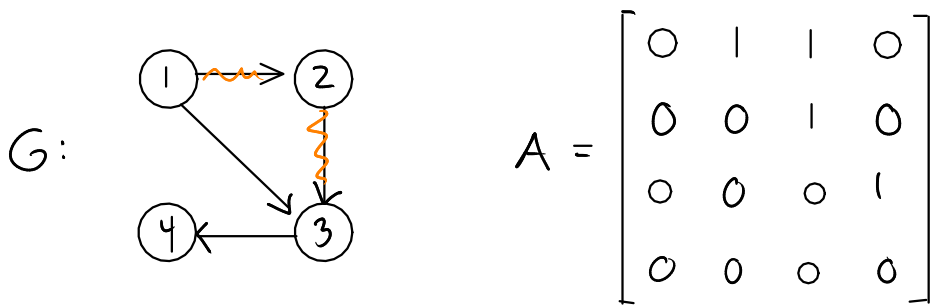
Def. 9:

$M_1 \odot M_2$ beregnes som $M_1 \cdot M_2$, men med

$+ \rightarrow \vee$

$\cdot \rightarrow \wedge$

Eks.: Adjacens



A angiver alle kanter, dvs alle veje af længde 1, i G.
Hvilke veje af længde 2 findes der i G?

$$A \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$