

Relationer (afsnit 9.1)

Bestriver en sammenhæng mellem elementer i en eller flere mængder. Bruges f.eks. i database.

Eks:

(studie-nr, navn, adresse, uddannelse) kvartær rel.

(studie-nr, kursus) binær relation

$<, =, |$, „er barn af“ binære relationer

Def. 1: Lad A og B være mængder.

En binær relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$.

Eks. angiver:

A : mængde af studie-nr., B : mængde af kurser
eller

$$A = B = \mathbb{Z}$$

eller...

1 dag:

- Eks
- Rep. (afsnit 9.3)
 - Mængde-bygger-notation, opsamling
 - Matricer
 - Grafer
- Egenskaber
 - Refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk, transitiv
- Lukninger (afsnit 9.4)

Eks: Relation fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} R_{\text{inv}} &= \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \} \\ &= \{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \} \end{aligned}$$

NB: $(2, \frac{1}{2}) \in R_{\text{inv}}$, men
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{\text{inv}}$

$(a, b) \in R$ skrives også

$a R b$ og læses

"a er relateret til b gennem R"

↙ rækkefølgen har betydning
(medmindre R er symmetrisk)

$(a, b) \notin R$ skrives også

$a \not R b$

Eks: $5 R_{\text{inv}} \frac{1}{5}$, men $6 \not R_{\text{inv}} \frac{1}{5}$ og $\frac{1}{5} \not R_{\text{inv}} 5$

Eks: $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid a < b \}$
 $= \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,4), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner (hvorfor?)

Eks: $R_{abs} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \vee a = -b \}$
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 2: Lad A være en mængde
 En relation på A er en relation fra A til A ,
 d.v.s. en delmængde af $A \times A$.

(Fra nu af kun denne slags relationer)

Eks: $R_<$ er en relation på $\mathbb{N}$.
 R_{abs} er en relation på $\mathbb{Z}$.

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

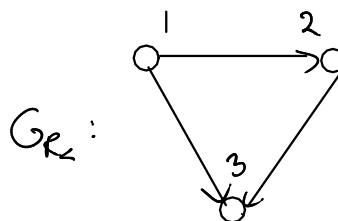
Man kan repr. rel. v.h.a.

- Opremsning
- Mængde-byggeset notation
- Matrix (Hvis A, B endelige)
- Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
(digraphs)

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eks: $R_{\equiv}$ relation på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_{\equiv} = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{2}\}$$

$$= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber (afsnit 9.1)

Def. 3: R : relation på A

R er refleksiv, hvis

$(a, a) \in R$ for alle $a \in A$

Eks:

$\checkmark$: $R_{\leq}$, R_{abs} , $R_{\equiv}$, $R_{=}$, $R_{\textcircled{1}}$ "går op i"

$\times$: R , $R_{<}$, $R_{\neq}$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?
graf-

Lukninger (afsnit 9.4)

R : relation på A .

Den refleksive lukning af R er

$$r(R) = R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at R er refleksiv.

Eks:

$$\begin{aligned} r(R_<) &= \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \mid a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a < b \vee a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a \leq b\} \\ &= R_{\leq} \end{aligned}$$

Eks:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\} \text{ på } \{1,2,3,4\} \\ r(R) &= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Mere generelt:

R : relation

P : egenskab

Lukningen af R m.h.t. P er den mindste mængde R' , som opfylder

- $R \subseteq R'$
- R' har egenskaben P

Def. 4: R : relation på A .

R er symmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad \text{for alle } a,b \in R$$

Eks:

$$\checkmark: R_{=}, R_{\neq}, R_{\text{abs}}, R_{\neq}$$

$$\times: R_{<}, R_{\leq}, R_{|}, R$$

Den symmetriske lukning af R er

$$S(R) = R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Eks: Symmetrisk lukning af

$$- R_{<}: R_{<} \cup R_{>} = R_{\neq}$$

$$- R_{\leq}: R_{\leq} \cup R_{>} = A \times A$$

$$- R_{=}: R_{=}$$

$$- R: R \cup \{(3,2)\} = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

Def. 4:

R er antisymmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eks:

Anti-symmetrisk: $R_<, R_{\leq}, R_=>$

Symmetrisk: $R_{\equiv}, R_=\rangle$

Ingen af delene: $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$

Antisymmetrisk løsning findes ikke.

For at gøre en ikke-antisymmetrisk relation antisymmetrisk skal man fjerne elementer.

Def. 5: R relation på A

R er transitiv, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \text{for alle } a,b,c \in R,$$

Eks:

$$\checkmark: R_{\leq}, R_{<}, R_{=}, R_{\equiv}, R_{\text{abs}}, R_1,$$

$$\forall: R_{\neq}, \{(1,2), (2,3), (3,3)\} = S$$

$$t(S) = \{(1,2), (2,3), (1,3), (3,3)\}$$

Nogle gange "griber det om sig":

Transitiv lukning af

$$T = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$$

Tilføjer:

$$T^2 = (1,3) \quad (2,1) \quad (3,2)$$

(svare til stier af
længde 2 i G_T)

$$T^3 = (1,1) \quad (2,2) \quad (3,3)$$

(svare til stier af længde 3 i G_T)

$$t(T) = T \cup T^2 \cup T^3 = A \times A, \quad \text{hvor } A = \{1,2,3\}$$



Afsnit 9.1:

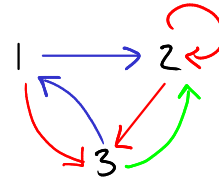
Relationer kan sættes sammen (præcis som funktioner):

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$

Eks:

$$R = \{ (1, 2), (3, 1) \}$$

$$S = \{ (1, 3), (2, 2), (2, 3) \}$$



$$S \circ R = \{ (1, 2), (1, 3), (3, 3) \}$$

$$R \circ S = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$

$$R^2 = R \circ R = \{ (3, 2) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{ \}$$

$$R^* = \{ (1, 2), (3, 1), (3, 2) \}$$

Def 9.4.2: $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \quad \text{hvis } A \text{ er endelig,}$$

da ingen vej i G_R har mere end $|A|$ kanter.