

Sidste gang:

Binære relationer på en mængde A .

Repr.:

Opremsning / mængde-bygger-notation

Matricer

Grafer

Egenskaber

Refleksiv - loops, 1 på diagonal

Symmetrisk - dobbelt-pile, symm. matrix

Anti-symmetrisk - ingen dobbelt-pile,
l'ère spejles ikke i diagonalen

transitiv - vej $\Rightarrow$ kant

Lukning:

Refleksiv - tilføj loops

Symmetrisk - $a \rightarrow b \rightarrow a$

Anti-symmetrisk - $\%$

Transitiv - $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

Gentag

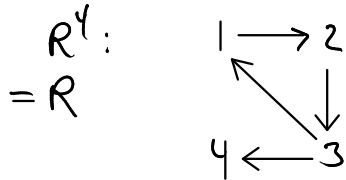
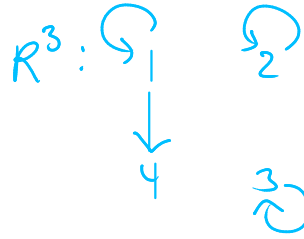
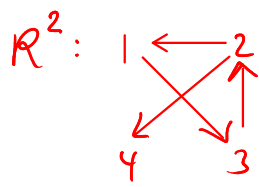
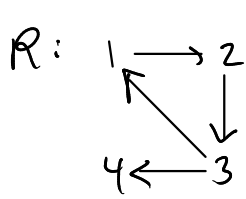
Relationer kan sættes sammen ligesom funktioner:

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$

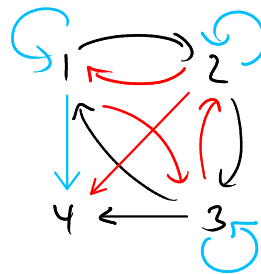
Transitive lukning af R :

$$t(R) = R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R \circ R \cup R \circ R \circ R \cup \dots$$

Eks: $R = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$



$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$:



Relationer kan også kombineres v.h.a. de andre
mængde-operationer: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_1 \oplus R_2$,
 se Eks 17-19 (afsnit 9.1).

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def. 9.5.1:

En relation, som er

- refleksiv
- symmetrisk
- transitiv

kaldes en ækvivalensrelation.

Eks:

$$\sqrt{}: =, \equiv$$

$$\forall: \leq, |, \neq$$

Def. 8.5.2:

Hvis R er en ækv. rel., og $(a, b) \in R$,
da er a og b ækvivalente.

D.v.s. hvis R er en ækv. rel., og $(b, a) \in R$,
da er a og b ækvivalente (R er symmetrisk).

Def. 9.5.3:

Lad R være en ækv. rel. på A og
lad $a \in A$.

Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{ b \mid (a, b) \in R \} = \{ b \mid (b, a) \in R \}$$

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$[3]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\} = [0]$$

O.S.U.

Bemærk: $[0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: „disjunkt forening“)

Eks: $R = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øetning 9.5.1:

Lad R være en ækv.rel. på A .

Da gælder

$$aRb \quad (i)$$

$$\Updownarrow [a] = [b] \quad (ii)$$

$$\Updownarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset \quad (iii)$$

Bevis:

Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

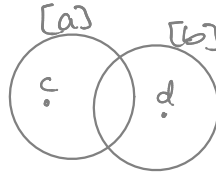
symm. og trans.

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b] : \quad ((i) \Rightarrow (ii))}$$

Antag, aRb .

Da gælder også bRa , da R er symmetrisk

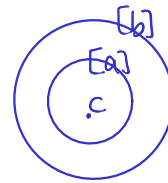
Kunne man forestille sig:



Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b] :}$$

$c \in [a]$
 $\Updownarrow$ aRc , per def.
 $\Downarrow$ bRc , da bRa og R er transitiv
 $\Updownarrow$ $c \in [b]$ per def.



$$\underline{[b] \subseteq [a] :}$$

Helt tilsvarende:

$d \in [b]$
 $\Updownarrow$ bRd , per def.
 $\Downarrow$ aRd , da aRb og R er transitiv
 $\Updownarrow$ $d \in [a]$

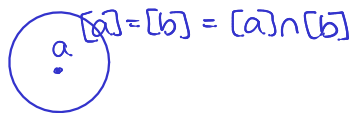


$$\text{O.v.s. } [a] = [b]$$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset :} \quad ((ii) \Rightarrow (iii))$$

Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er **refleksiv**



$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb :} \quad ((iii) \Rightarrow (i))$$

$$\Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge bRc$$

$$\Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \text{symmetrisk}$$

$$\Leftrightarrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \text{transitiv}$$

