

Sidste gang:

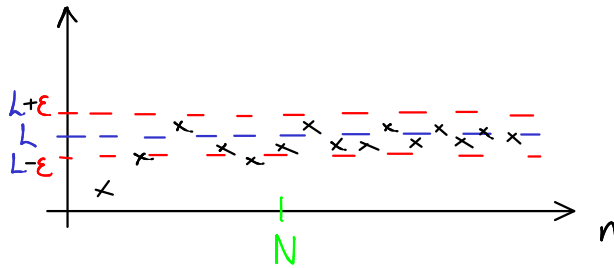
Spørgetime - doodle

Følger (sequences)

Konvergens/divergens

Def 2: $\{a_n\}$ konverger mod L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$



Regneregler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sætning 3:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, hvis $|x| < 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$

Rækker:

Def. 3: Betragt række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes række's n'te partielle sum.

Hvis s_n konvergerer, er $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Eks: Geometriske række

$$\sum_{i=0}^n r^i = \sum_{i=1}^{n+1} r^{i-1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

D.v.s.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ divergerer, hvis } r \leq -1.$$

Eks: $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 3^n = \infty$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

| dag:

Regneregler

Konvergenzkriterier

Men først et eks:

Eks 4:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Harmonisk række

$$H_n = S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n\text{'te harmoniske tal}$$

H_n optræder i mange sammenhænge, f.eks.:

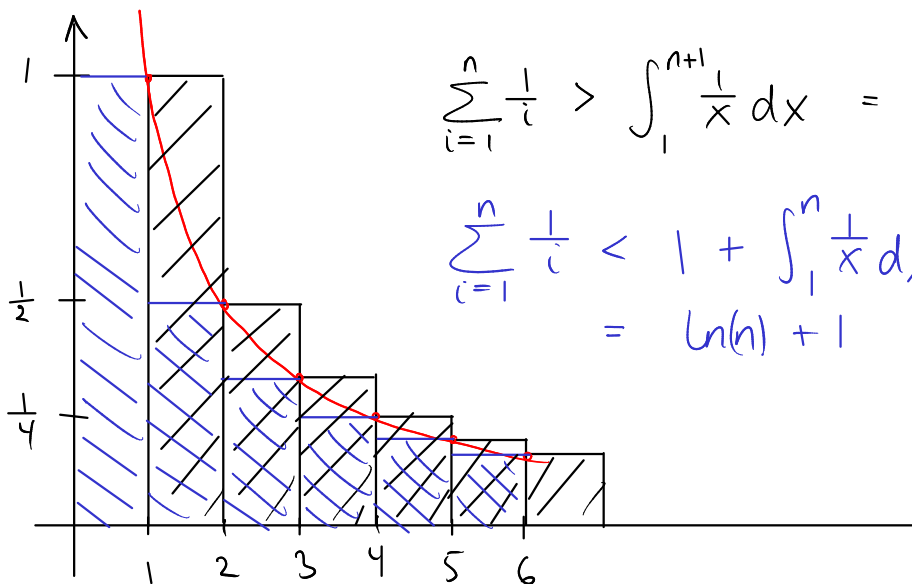
Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pakker med et klistmærke i hver
n forskellige klistmærker

For at få et af hver slags skal man i gennemsnit
købe nH_n pakker:

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1}\right)$$

Hvor mange Corn Flakes - pakker skal vi så købe?



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = \ln(n) + 1$$

D.v.s. $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$

$\Rightarrow$ vi skal i gennemsnit købe $\approx n \ln n$ pakker.

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regnearbejder, som vi mødte i afsnit 9.1.

Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7:

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c A$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$ for alle $n \geq 1$
 $\Downarrow$
 $A \leq B$

Illustration:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ hvor}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

D.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i = A + B$$

Men:

$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$ kan ikke generelt omskrives til $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{4})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = \infty \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n}{\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^n} = \frac{1}{1/3} = 3$

Sætning 4

$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

Bemærk: ikke $\Uparrow$!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

D.v.s. (ved kontraposition):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

Bevis:

$$\begin{array}{l} \Uparrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \\ \Downarrow \\ S_n \text{ konvergerer} \\ \Uparrow \exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \end{array}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

D.v.s.

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

HUSK at det modsatte **ikke** gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverger mod ∞ .

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en **nødvendig**, men **ikke tilstrækkelig betingelse** for, at $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

Eks 5(a):

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ diverger mod ∞ , da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$.

Sætning 5:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer
 $\Updownarrow$
 $\exists N \geq 1 : \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer

Beris: opgave 23

D.v.s. konvergenen afhænger kun af rækens "hale" (tail).

D.v.s. det er ok blot at udføre konvergenstests'ne i afsnit 9.3 på rækens hale.

Afsnit 9.3: Konvergens-tests for positive rækker

Seating 8 (Integraltesten):

Hvis $a_n = f(n)$,

hvor f er positiv, kontinuert og aftagende
på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$

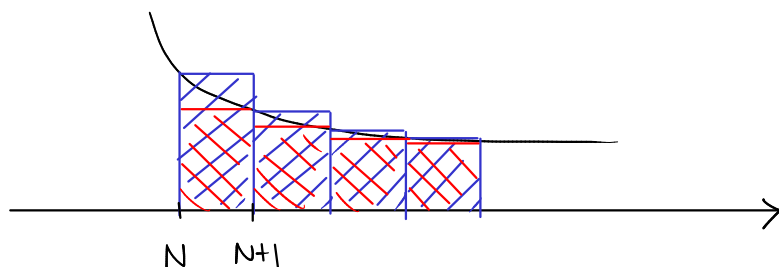
da gælder, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konvergerer}$$

Bevis: Samme slags argument som for Coupon Collector:

Seating 5:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$



$$\int_N^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n, \text{ da } f \text{ er aftagende}$$

Da f er positiv, betyder det, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Rightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_N^{\infty} f(x) dx$$

Da $\{a_n\}$ er positiv, betyder det, at

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

□

Eks 9.3.1: p -rækker (Generaliserer H_n)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left\{ \begin{array}{l} \text{konvergerer, hvis } p > 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, \text{ hvis } p \leq 1 \end{array} \right\} \text{ God at huske!}$$

Bevis:

$$\underline{p \leq 0}: \frac{1}{n^p} = n^{\overbrace{-p}^{\geq 0}}$$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} > 0$$

Dermed **divergerer** rækken **mod** ∞ ifølge Sætning 4.

$p > 0$:

Integral-kriteriet...

Sætning 9 (Sammenligningstest):

Hvis $\exists N, K \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$,

da gælder:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer}$$

Basis: Læs selv.

Eks 3

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \text{ konvergerer iflg. Sætning 9a:}$$
$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}, \text{ for } n \geq 1$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ divergerer iflg. Sætning 9b:}$$
$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2$$

Husk, at Sætning 9 **ikke** siger, at $\sum a_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum b_n$ konvergerer.

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grøse-sammenlignings-testen):

Hvis

$\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0 \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

(a) $(L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger}$

(b) $(L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverger mod } \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverger mod } \infty.$

Beweis:

(a) $L < \infty$

$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + \underbrace{1}_{\varepsilon \text{ i Def. 2}}, \text{ iflg Def. 2}$

$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$

D.v.s.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger,}$

iflg. Sætning 9(a)

(b) bevises på tilsvarende vis v.h.s. Sætning 9(b).

□

Sætning 10 er nogle gange lidt lettere at anvende end Sætning 9