

Sidste gang:

Logiske operatoren: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$ + præcedensregler

Sandhedstabeller for operatoren og sammensatte udsagn

To ækvivalenser:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad (\text{Tabel 1.3.8})$$

$p \Rightarrow q$

p medfører q

hvis p , så q

p er en tilstrækkelig betingelse for q

p kun hvis q

q er en nødvendig betingelse for p

p	q	$p \Rightarrow q$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

I det tilfælde
hvor p er
sand, er q
det også

$$p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$$

$$p \Leftrightarrow q$$

p er ensbetydende med q

p hvis og kun hvis q

p hvis q

p er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for q

1 dag:

⊕

Flere ækvivalenser (Fra Tabel 1.3.6 og 1.3.7)

Tabel 1.3.6, 1.3.7 og 1.3.8 er nyttige!

Læs gerne dem alle tre igennem.

Åbne udsagn
Kvantorer : $\forall, \exists$ } Afsnit 1.4

I ridder-eksemplet kunne A's og B's udtalelser også skrives som h.h.v. b og $a \oplus b$:

$p \oplus q$: eksklusiv eller
enten p eller q
 p og q har forskellige sandhedsværdier

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

D.v.s.

$$p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$$

$$p \oplus q \equiv \neg p \Leftrightarrow q$$

D.v.s. " $\oplus$ " kan udtrykkes v.h.a. " $\neg$ " og " $\Leftrightarrow$ "

Kan vi også omskrive andre logiske operatoren?

Kan vi f.eks. skrive " $\Rightarrow$ " v.h.a. andre operatoren?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	
S	S	S	S	} (1)
S	F	F	F	
F	S	S	S	} (2)
F	F	S	S	

For begge udtryk gælder:

(1): Hvis p er sand, skal q også være det.

(2): Hvis p er falsk, er udsagnet sandt.

Vi har altså bevist:

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	(Tabel 1.3.7, 1. linje)
--	-------------------------

Tabel 1.3.6 (s. 29) er også vigtig

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive Love: (lidt som at gøre ind i parentes)

$$(1) \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Sandhedstabellen har 8 rækker

For begge udtryk gælder:

- Hvis p er sand, er udtrykket sandt.
D.v.s. der står S i de fire rækker, hvor p er sand.
- Hvis p er falsk, skal både q og r være sande.
D.v.s. der står S i rækken, hvor $p \Leftrightarrow F$ og $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow S$, og F i de resterende 3 rækker

$$(2) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Bevis to af to

For begge udtryk gælder

- p skal være sand
- mindst en af q og r skal være sand, men de behøver ikke begge være sande

De Morgans Love

$$(1) \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Beis: opgave 1.3.6

Beis: Tabel 1.3.3 (s.27)

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(2+2 \neq 4 \vee 3 > 5) \\ \Updownarrow & \\ & \neg(2+2 \neq 4) \wedge \neg(3 > 5) \\ \Updownarrow & \\ & 2+2 = 4 \wedge 3 \leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(2+2 = 4 \wedge 3 > 5) \\ \Updownarrow & \\ & 2+2 \neq 4 \vee 3 \leq 5 \end{aligned}$$

Efterhånden, som vi har flere og flere ækvivalenser at gøre gældt med, er sandhedstabeller ikke nødvendigvis den mest effektive måde at bevise nye ækvivalenser:

Eks 1.3.6 (s. 31)

$$\boxed{\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q} \quad (\text{Tabel 1.3.7, 15})$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && (\text{Tabel 1.3.7, 21}) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \left\{ \begin{array}{l} (\text{De Morgan (2)}) \\ (\text{Dobbelt-neg. loven}) \end{array} \right. \\ &\equiv p \wedge \neg q && \downarrow \\ &&& (\text{Tabel 1.3.6}) \end{aligned}$$

Virker det rimeligt?

Ja:

$p \Rightarrow q$ er falsk, netop når p er sand, og q er falsk.
 $p \wedge \neg q$ er sand, netop når _____

Lidt mere terminologi:

Def. 1.3.1 (s.26)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**, uanset sandhedsværdier af de udsagn, som indgår

Eks: $p \vee \neg p$

$$p \Leftrightarrow p$$

$$p \Rightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{og alle de andre} \\ \text{øver i afsnit 1.3})$$

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**, uanset sandhedsværdier af de udsagn, som indgår
(**Contradiction**)

Eks: $p \wedge \neg p$

$$p \Leftrightarrow \neg p$$

$$p \oplus p$$

$$\neg(p \vee q) \oplus (\neg p \wedge \neg q)$$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi eller en modstrid

Eks: $p \vee q$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow \neg p$$

Heltal : $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Positive heltal : $\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Naturlige tal : $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$

NB: Noget definerer $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Eks:

$$Q(x): 2x > x+4$$

For hvilke x -værdier er $Q(x)$ sand?

$$\begin{aligned} & 2x > x+4 \\ \Leftrightarrow & x > 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q(5) \wedge Q(6) \wedge Q(7) \wedge \dots \quad \mathcal{S} \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{5, 6, 7, \dots\} : Q(x) \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 5 : Q(x) \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 5 \Rightarrow 2x > x+4) \quad (*) \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 4 \vee 2x > x+4) \end{aligned}$$

(*) illustrerer, at def. af " $\Rightarrow$ " er meningsfuld:

$$R(x): x \geq 5 \Rightarrow 2x > x+4$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ R(3): & \quad \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \quad \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$R(4): \quad \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \quad \mathcal{S}$$

$$R(5): \quad \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \quad \mathcal{S}$$

$$R(6): \quad \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \quad \mathcal{S}$$

$\vdots$

$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}$ opstår ikke

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{6, 7, 8, \dots\} : 2x > x \quad \mathcal{S} \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \geq 6 \Rightarrow 2x > x}_{T(x)} \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$T(4): \quad \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$$

$$T(5): \quad \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}$$

$$T(6): \quad \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$$

$\vdots$

$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}$ opstår ikke

Eks:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) && \text{F} \\ \Leftrightarrow & Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3) \wedge \dots \end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned} & Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots && \text{S} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \end{aligned}$$

↑
„eksisterer“ „sådan at“

$$\exists x \in \mathbb{Z} : Q(x) \quad \text{S}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 10 : Q(x) \quad \text{S}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 : Q(x) \quad \text{F}$$