

Sidste gang:

⊕

Ækvivalens (bevist v.h.a. sandhedstabeller eller omskrivninger)

Kvantorer

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \geq x$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : |x| = x$$

} Afsnit 1.4

1 dag:

∃!

Negering af kvantorer } (afsnit 1.4)

Indlyrede kvantorer (afsnit 1.5)

Start på beviser:

Regler for logiske slutninger (afsnit 1.6)
(Bevis-metoder (afsnit 1.7))

Eks

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S \quad (x=0)$$

Dette udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S$$

↑
"Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad F \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \quad F$$

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

Eks

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 3 \vee x \geq 4) \quad \text{!} \\ (\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3) \vee x \geq 4 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Negering

Eks

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4) && \text{S} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4) && \text{F} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

Eks:

T : mængden af studerende, som er tilmeldt
DM547 / DM549 / MM537 / MM540

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in T : x \text{ er mødt op til denne forelæsning} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in T : x \text{ er ikke mødt op til denne forelæsning} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \Uparrow & \neg \forall x \in T : x \text{ er mødt op til denne forelæsning} \\ & \forall x \in T : x \text{ er ikke mødt op til denne forelæsning} \end{aligned}$$

General

De Morgans Love for Kvantorer:

$$\begin{array}{lcl} \neg(\forall x : P(x)) & \equiv & \exists x : \neg P(x) \\ \neg(\exists x : P(x)) & \equiv & \forall x : \neg P(x) \end{array}$$

(Tabel 1.4.2)
S. 51

Eks:

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ \neg \forall x \in \mathbb{N} : (2x \geq 4 \vee 2x \geq 2^x) \\ \Downarrow \\ \exists x \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \end{array} \quad \text{S} \quad (x=0)$$

Udsagnet kan præciseres:

$$\exists! \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \quad \text{S}$$

Indlejrede kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

$$P(x, y) : x + y = 0$$

$$P(2, -2) \equiv \text{S}$$

$$P(2, 0) \equiv \text{F}$$

$$\Updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : P(x, y) \quad \text{S}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$$

Er sandt, hvis nedenstående er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x + y = 0$$

$$\text{Vælg } y = -x$$

D.v.s. y må gerne afhænge af x

Har kvantorenes orden betydning?

$$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0 \quad \text{F}$$

Er sandt, hvis nedenstående er muligt:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x + y = 0$$

Her skal vi vælge et y , der passer sammen med alle $x \in \mathbb{Z}$.

Generelt: $\exists y : \forall x : Q(x,y) \Rightarrow$
 $\forall x : \exists y : Q(x,y)$

D.v.s. $\exists y : \forall x : Q(x,y)$ er et stærkere udsagn
end $\forall x : \exists y : Q(x,y)$,

ligesom $x > 20$ er et stærkere udsagn end $x > 10$,
fordi $x > 20 \Rightarrow x > 10$ ($x > 20$ siger mere om x
end $x > 10$, d.v.s. $x > 20$ giver mest information).

Eks: (kvantorenes orden)

S: mængden af studerende i dette lokale

H: mængden af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$\forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y)$

$\exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y)$

Der er en hobby, som alle stud. i dette lokale har.

Eks (negering):

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ \neg (\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \\ \Downarrow \\ \forall x \in \mathbb{Z} : \neg (\forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \\ \Downarrow \\ \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y \end{array}$$

Eks: (negering - hobbies revisited)

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in S : \exists y \in H : P(x, y) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in S : \forall y \in H : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

„Der er en studerende i dette lokale, som ikke har nogen hobby.“

$$\begin{aligned} & \neg \exists y \in H : \forall x \in S : P(x, y) \\ \Leftrightarrow & \forall y \in H : \exists x \in S : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

„Der er ingen hobby, som deles af alle studerende i lokalitet.“

Eks: (ens kvantorer)

Når kvantorerne er ens, må man gøre bytte om på rækkefølgen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \end{aligned}$$

„går op i“

(Se Tabel 1.5.1, s. 63)

Sidste omskrivning er gyldig, fordi x og y har samme univers.

Eks : (tre kvantorer)

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad S$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

$$\text{Vælg } y = x$$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z$$

Kan man bytte om på de to $\forall$ i dette eks?

Nej: (og det skyldes det $\exists$, der er imellem dem)

$$\forall z \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad F$$

For enhver $z \in \mathbb{Z}^+$

Find et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $x \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

$$x = z \cdot y + 1 \Rightarrow \\ \frac{x}{y} = z + \frac{1}{y} > z$$

Regler for logiske slutninger (afsnit 1.6)

Mange eksempler på brug og „misbrug“ af reglerne.
Læs dem efter behov.

Tabel 1.6.1:

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array} \quad p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad (\text{Modus ponens})$$

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \quad \neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p \quad (\text{Modus tollens})$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (\text{Hypotetisk syllogisme})$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array} \quad (p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p \quad (\text{Disjunktiv syllogisme})$$

⋮

Bevismetoder

(afsnit 1.7)

Hovedtyper:

Direkte bevis

Benytter, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Kontrapositions bevis

Benytter, at $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

Modstridsbevis

Benytter, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow p$

$\swarrow$ A ridder $\nwarrow$ A knægt

$\nwarrow$ A ridder $\wedge$ A knægt

I de første eksempler skal vi bruge flg. def.

Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

n lige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$

n ulige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$

To heltal har samme **paritet**, hvis begge er lige, eller begge er ulige

(Def. 1.7.1)