

Sidste gang:

Berismetoder

- Direkte bevis

$$\begin{array}{c} n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \\ \quad \quad \quad 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{c} n \text{ ulige} \quad n^2 \text{ ulige} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{p \Rightarrow q} \end{array}$$
$$\underbrace{(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_2 \Rightarrow q)}_{\substack{n \text{ er} \\ \text{ulige} \quad \quad n=2k+1, \\ \quad \quad \quad k \in \mathbb{Z} \quad \quad \quad n^2 \text{ er} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{ulige}}} \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$$

- Kontrapositionsbevis

$$\underbrace{(\neg q \Rightarrow \neg p)}_{\substack{n \text{ lige} \quad n^2 \text{ lige}}} \Leftrightarrow \boxed{p \Rightarrow q} \quad \begin{array}{c} n^2 \text{ ulige} \quad n \text{ ulige} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{p \Rightarrow q} \end{array}$$

- Modstridsbevis

$$\underbrace{(\neg p \Rightarrow F)}_{\substack{\text{Ingen uge med} \\ 2 \text{ fødselsdage}}} \Rightarrow \boxed{p} \quad \begin{array}{c} \text{Mindst 2 med fødselsdag i samme uge} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{p} \end{array}$$

Høgst 52 i lokalet

„Tricks“ : Split op i delresultater
Se først på simple specielle tilfælde
...

1 dag:

Induktionsbeviser

Induktion

(Afsnit 5.1)

I denne uge i DMS34 kommer datalogerne til at se, hvordan induktion bruges til at bevise korrekthed af algoritmer. Både dataloger og SE-ingeniører kommer til at se det i foråret.

Recap af potensregningsregler:

$$2^k \cdot 2^l = 2^{k+l}$$

D.v.s.

$$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Induktionsbeviser bruges til at bevise parametriserede udsagn:

Eks:
$$\overbrace{\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \text{ for alle } n \in \mathbb{N}}^{P(n)}$$

$$\Updownarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\Updownarrow \forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n}_{P(n)} = 2^{n+1} - 1$$

$$P(0): \underbrace{2^0}_{=1} = \underbrace{2^1 - 1}_{2-1=1} \quad \text{---} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{matrix}} \right\} \text{Basis-tilfælde}$$

$$P(1): \underbrace{2^0 + 2^1}_{1+2=3} = \underbrace{2^2 - 1}_{4-1=3} \quad \text{---}$$

$$P(2): \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2}_{1+2+4=7} = \underbrace{2^3 - 1}_{8-1=7} \quad \text{---}$$

$$\underbrace{2^3 - 1}_{\text{ifølge } P(2)}$$

$$P(3): \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3}_{2^3 - 1 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1} = 2^4 - 1 \quad \text{---}$$

Mer generelt:

hvis vi ved, at $\overbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1}}^{P(k-1) \text{ Induktions-antagelse}} = 2^k - 1$,
 kan vi udlede følgende:

$$\boxed{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k \\ 2^k - 1 + 2^k \\ 2 \cdot 2^k - 1 \\ 2^{k+1} - 1 \end{matrix}} \right\} \text{Induktions-} \\
\begin{aligned} &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= \boxed{2^{k+1} - 1} \end{aligned}$$

$P(k)$

Basistilfælde: Bevis $P(0)$

Ind. skridt: $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : \underbrace{P(k-1)}_{\text{Ind. ant.}} \Rightarrow P(k)$

$$\begin{aligned} &P(0) \\ k=1: &P(0) \Rightarrow P(1) \\ k=2: &P(1) \Rightarrow P(2) \\ k=3: &P(2) \Rightarrow P(3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

„Domino-effekt“:

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \dots$$

Bevis ved induktion over n .

Basis: ($n=0$)

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

$P(0)$

Ind. ant: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

$P(k-1)$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} &2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \\ \Downarrow & \\ &2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

$P(k-1)$

$\Downarrow$

$P(k)$

□

Bevis $\forall n \geq m: P(n)$ o.h.a. (simpel) induktion over n :

Basis: Bevis $P(m)$

Induktionsstrid: Bevis, at $\underbrace{P(k) \Rightarrow P(k+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}$, for alle $k \geq m$.

Eller bevis, at $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, for alle $n \geq m+1$
Eller ...

O.v.s. vi beviser:

$$P(m)$$

$$P(m) \Rightarrow P(m+1)$$

$$P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$$

$$\vdots$$

$$k=m \quad (\text{eller } k=m+1)$$

$$k=m+1 \quad (\text{eller } k=m+2)$$

Eks:

Prøve selv at bevise, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for alle } n \geq 1.$$

$$\text{D.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for alle } n \geq 1$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: ($n=1$)

$P(1)$

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\text{Ind. ant: } 1+2+\dots+k-1 = \frac{(k-1)k}{2}$$

$P(k-1)$

Ind. skridt: ($P(k-1) \Rightarrow P(k)$)

For $k \geq 2$ gælder:

$$\Downarrow \quad 1+2+\dots+k-1 = \frac{(k-1)k}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$$\underline{1+2+\dots+k-1 + k} = \frac{(k-1)k}{2} + k$$

$$= \frac{(k-1)k + 2k}{2}$$

$$= \underline{\frac{(k+1)k}{2}}$$

□

Vi har vist:

$P(1)$

$\forall k \geq 2: P(k-1) \Rightarrow P(k)$

Äquivalent basis:

Basis: ($n=1$)

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$P(1)$

Ind. anl.:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$P(k)$

Ind. skritt: ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$)

For $k \geq 1$ gäller:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{ind. anl.})$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

□

$\forall$ har vist:

$P(1)$

$\forall k \geq 1 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Eks:

$$2^n < n!, \text{ for } n \geq 4$$

Lad os starte med at se på små n -værdier.
Lidt ligesom sidste forelæsning, hvor vi så på
simple special-tilfælde for at få en fornemmelse af,
hvad der foregår:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_8 < \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{24} = 4!$$

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2 \cdot 8 = 16} < \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5 \cdot 24 = 120} = 5!$$

$$2^6 = 2 \cdot 16 < 6 \cdot 120 = 6!$$

Vi ganger hele tiden 2 på venstre-siden og
større og større tal på højre-siden.
D.v.s. når n vokser, bliver uligheden "mere og
mere sand".

Basis ved induktion over n :

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Ind. ant.: $2^{k-1} < (k-1)!$

Ind. skridt: For $k \geq 5$ gælder:

$$2^{k-1} < (k-1)!$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{k-1} < k \cdot (k-1)!, \text{ da } 2 < k$$

$$\Uparrow 2^k < k!$$

Påstand: Alle æbler har samme farve

Bevis: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.: $k \geq 2$

I enhver skål med $k-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $k \geq 3$

Stil æblerne op på række:



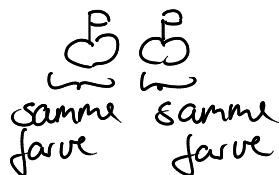
De første $k-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

De sidste $k-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $k-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle k æbler samme farve. $\square$

Bemærk: Argumentet i indskridtet fungerer ikke for $k=2$:



D.v.s. vi har vist:

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$

Da $P(2)$ (selvfølgelig) er falsk, har vi ikke meget glæde af at vide, at $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$