

Sidste gang:

Bevis $\forall n \geq m: P(n)$ o.h.a. (simpel) induktion over n :

Basis: Bevis $P(m)$

Induktionsskridt: Bevis, at $\underbrace{P(k) \Rightarrow P(k+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}$, for alle $k \geq m$.

Eller bevis, at $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, for alle $n \geq m+1$

Eller bevis, at $P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$, for alle $n \geq m-1$

Eller ...

O.v.s. vi beviser:

- $P(m)$
- $P(m) \Rightarrow P(m+1)$
 $P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$
...

Eksempler:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$2^n < n!, \quad \text{for } n \geq 4$$

Alle æbler har samme farve:

- $P(1)$
- $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

} Der mangler et led
i kæden, nemlig
 $P(1) \Rightarrow P(2)$

1 dag:

Mængder

Representation:

Opregnsning

Mængdebygger - notation

Venn-diagrammer

Kardinalitet

Operatoren: $\cap \cup \subseteq \subset - \bar{} \mathcal{P}$

Mængder: Afsnit 2.1-2.2

Def. 2.1.1:

En **mængde** er en uordnet samling af objekter, kaldet **elementer** eller **medlemmer**

$x \in A$ betyder, at x er et element i mængden A

$x \notin A$ betyder, at x ikke er et element i mængden A

Eks: $A = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\}$
 $B = \{2, 3, 4\}$ **opremsning (enumeration)**
 $V = \{a, e, i, o, u, y\}$
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ **uendelig opremsning**
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 $L = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
 $= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\}$ **mængde-bygger-notation (set builder notation)**
 "hvorum der gælder" "går op i"
 $= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}$
 $= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Mængde-bygger-notation: $\{ \langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle \}$

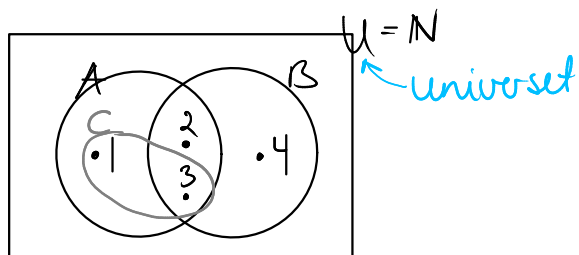
$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (\text{positive rationale tal})$$

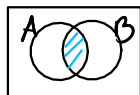
$|S|$: kardinalitet af S ("størrelsen" af S)
elementer i S , hvis S er endelig
Dat + Mat vender tilbage til kardinalitet af
uendelige mængder

Eks: $|\{1,2\}| = 2 = |\{1,2,2\}|$
 $|\{1,2,4,8,16\}| = 5$

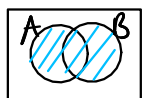
Venn-diagram:



$A \cap B = \{2, 3\}$ *fællesmængde / snitmængde (intersection)*
 „fælles med“



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ *föreningsmængde (union)*
 „forent med“



Bemærk:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}, \text{ men } \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}, \quad |\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}| = 2$$

Delmængde (subset)

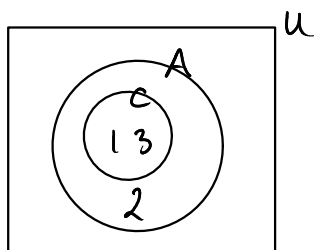
$S_1 \subseteq S_2 \iff \forall x \in U: (x \in S_1 \Rightarrow x \in S_2)$
 $\iff \forall x \in S_1: x \in S_2$
 „er en delmængde af“
 „er indeholdt i“

Eks:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

$$C = \{1, 3\}$$

$$C \subseteq A$$



$\emptyset = \{\}$ Den tomme mængde

Bemærk: (Sætning 2.1.1)

For enhver mængde A gælder:

- $A \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in A: x \in A$$

- $\emptyset \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in \emptyset: x \in A \quad \text{eller}$$

$$\forall x \in U: (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{F}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{S}}$

Ägte delmængde (proper subset)

$$C \subset A \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \neq A$$

Eks:

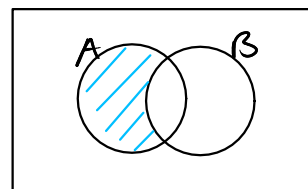
$$\emptyset \subset C$$

$$C \subset A$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

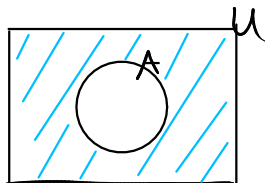
$$A \setminus B = A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

"fraregnet" (difference)

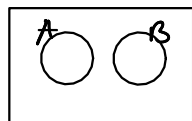


Komplementet af A :

$$\bar{A} = U - A$$



A og B er *disjunkte* (disjoint)
 $\Updownarrow$ $A \cap B = \emptyset$
 $\Updownarrow$ $A - B = A$
 $\Updownarrow$ $A \subseteq \bar{B}$



"Mængde-love":

Tabel 2.2.1 (s. 136)

$\cup$

$\cap$

$\sim$

$\sim$

$\sim$

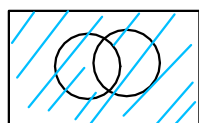
Tabel 1.3.6 (s. 29)

$\vee$

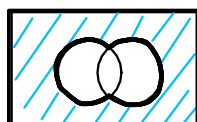
$\wedge$

De Morgans Love:

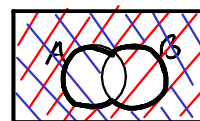
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$\square$: $\overline{A \cup B}$



$\square$: $\bar{A}$ $\square$: $\bar{B}$

$\square$: $\bar{A} \cap \bar{B}$

Bogen beviser love fra Tabel 2.2.1 v.h.a. omskrivninger
 af def. af de enkelte mængde-operationer og v.h.a.
 tilhørs-tabeller (membership tables), men det er som
 regel nemmest at bruge Venn-diagrammer (som ovenfor).

Potensmenge (power set)

$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}$$

Ex:

$$S = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 1 = 2^0$$

$$S = \{1\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2 = 2^1$$

$$S = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 4 = 2^2$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 8 = 2^3$$

$$S' = \{1, 2\}$$

$$S = \{1, 2, 3\}, \text{ d.h. } x=3$$

$$\text{Generell: } |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$$

Eks 5.1.10: En mængde S med n elementer har 2^n delmængder, for alle $n \geq 0$

D.v.s.

$$|S| = n \Rightarrow$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

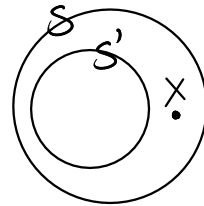
Ind. skridt: $n \geq 1$

Lad S være en vilkårlig mængde med n elementer.

Lad $x \in S$.

Lad $S' = S - \{x\}$.

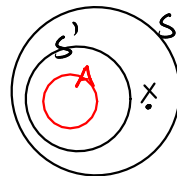
D.v.s. $|S'| = n-1$



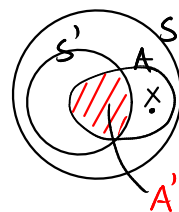
S' har 2^{n-1} delmængder ifølge ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



| alt $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ muligheder

□