

Sidste gang:

Funktioner

Definitionsmængde, værdimængde $\subseteq$ sekundærmængde

Injektiv: højst en x -værdi per y -værdi

Surjektiv: mindst en x -værdi per y -værdi

Bijektiv: injektiv og surjektiv, d.v.s.

præcis en x -værdi per y -værdi

Invers: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

Kun defineret, hvis f er bijektiv

Kombinationer: $\circ \cdot +$

Voksende, aftagende, monoton

Rekursive definitioner

Eks: Fibonacci-tallene

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1$$

basisskridt

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

rekursivt skridt

Stærk induktion

Eks: $f_n > \phi^{n-2}$, for $n \geq 3$

Basis: Ved stærk induktion over n

Basis: $f_3 = 2 < \phi$, $f_4 = 3 < \phi^2$

Indskridt: $k \geq 5$

$$f_{k-2} > \phi^{k-4} \wedge f_{k-1} > \phi^{k-3} \Rightarrow f_k > \phi^{k-2}$$

Hvis $P(n) \equiv f_n > \phi^{n-2}$, har vi bevist:

$$P(3) \wedge P(4)$$

$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$\vdots$

1 day:

Stærk induktion (afsnit 5.2)

Relationer

Egenskaber (afsnit 9.1)

Rifleksiv, (anti-)symmetrisk, transitiv

Repræsentationer (afsnit 9.3)

Oprensning, mønster-bygger-notation, matrix, graf

Lukninger (afsnit 9.4)

Stærk induktion

(Afsnit 5.2)

Mer generel formulering af induktionsprincippet:

Bevis $P(n)$, $n \geq m$, v.h.a. stærk induktion:

- Bevis $P(m), P(m+1), \dots, P(m+l)$, $l \geq 0$ (Basis)
- Bevis $\underbrace{(P(m) \wedge \dots \wedge P(n))}_{\text{Induktionsantagelsen}} \Rightarrow P(n+1)$, $n \geq m+l$ (Induktions-skridt)

(eller bevis $(P(m) \wedge \dots \wedge P(n-1)) \Rightarrow P(n)$, $n \geq m+l+1$)

Eks. overfor: $m=3$, $l=1$

I forbindelse med simpel induktion brugte vi en domino-analogi.

I forbindelse med stærk induktion kan man tænke på en uendeligt høj stige:

I basis-skridtet viser vi, at vi kan nå de $l+1$ nederste trin.

I induktions-skridtet viser vi, at hvis vi kan nå de $k-1$ nederste trin, kan vi også nå det k 'te trin.

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller

D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\begin{aligned} n=4 &= 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ n=5 &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ n=6 &= 4+2 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \\ n=7 &= 5+2 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ n=8 &= 6+2 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n=4 \\ n=5 \\ n=6 \\ n=7 \\ n=8 \end{aligned}} \right\} \text{Basis}$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$$

Ind. ant.: $\exists a, b \in \mathbb{N} : k-2 = 2a + 5b$

Ind. skridt: $k \geq 6$

$$k = \underbrace{(k-2)}_{\geq 4} + 2$$

$$= (2a + 5b) + 2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$

□

Bemærk, at vi har brug for både $n=4$ og $n=5$ i basis.
Hvis vi kun har $n=4$, beviser vi kun udsagnet for n lige.

Vi har vist:

- $P(4)$
- $P(5)$
- $P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$
- $\vdots$

$$m=4, \quad l=1$$

Ethvert udsagn, som kan bevises v.h.a. stærk induktion, kan også bevises v.h.a. simpel induktion
F.eks. kan udsagnet i eksemplet ovenfor vises v.h.a. simpel induktion, men det er mere besværligt:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: \exists a, b \in \mathbb{N}: n = 2a + 5b$$

Bevis: Ved (simpel) induktion over n .

Basis: $4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$

Induktionsantagelse: $\exists a, b \in \mathbb{N}: k-1 = 2a + 5b$

Ind. skridt: $k \geq 5$

$$\begin{aligned} k &= (k-1) + 1 \\ &= (2a + 5b) + 1, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N}, \text{ ifølge ind. ant.} \end{aligned}$$

Hvis $b=0$, er $a \geq 3$, da $k \geq 5$.

D.v.s.

$$\begin{aligned} k &= 2a + 1 \\ &= 2(a-2) + 2 \cdot 2 + 1 \\ &= 2 \underbrace{(a-2)}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } a \geq 2} + 5 \end{aligned}$$

Hvis $b \geq 1$, ses, at

$$\begin{aligned} k &= 2a + 5b + 1 \\ &= 2a + 5(b-1) + 5 + 1 \\ &= 2a + 5(b-1) + 2 \cdot 3 \\ &= 2 \underbrace{(a+3)}_{\in \mathbb{N}} + 5 \underbrace{(b-1)}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } b \geq 1} \end{aligned}$$

Relationer (Kapitel 9)

Beskriver en sammenhæng ml. elementer i en eller flere mængder.

Bruges f.eks. i databaser.

Eks :

(studie-nr., navn, adresse, uddannelse) kvartet relation

(studie-nr, kursus)

$<, =, |, \text{"er barn af"}$

} binære relationer

Vi skal kun beskæftige os med binære relationer:

Def 9.1.1

A, B : mængder

En relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

Eks. overfor :

A : mængde af studie-nr, B : mængde af kurser

eller

$A = B = \mathbb{Z}$

eller...

Eks: Relation fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}^+$

$$R_{inv} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \right\}$$
$$= \left\{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \right\}$$

NB: $(2, \frac{1}{2}) \in R_{inv}$, men
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{inv}$, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \in R$ skrives også

$a R b$ og læses

"a er relateret til b gennem R"

← rækkefølgen har betydning
(medmindre R er symmetrisk)

$(a, b) \notin R$ skrives også

$a \not R b$

Eks: $5 R_{inv} \frac{1}{5}$, men $6 \not R_{inv} \frac{1}{5}$

Eks: $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid a < b \}$
 $= \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,4), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner (hvorfor?)

Eks: $R_{abs} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \vee a = -b \}$
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 9.1.2

A : mængde

En **relation på A** er en relation fra A til A ,
d.v.s. en delmængde af $A \times A$

Fra nu af kun denne slags relationer.

Eks: $R_<$ er en relation på $\mathbb{Z}^+$
 R_{abs} er en relation på $\mathbb{Z}$

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

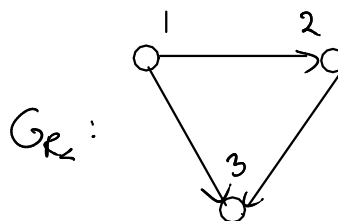
Man kan repr. rel. v.h.a.

- Opremsning
- Mængde-byggeset notation
- Matricer (Hvis A, B endelige)
- Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
(digraphs)

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eks: R_p relation på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_p = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$$

$$= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber

Def. 9.1.3

R : relation på A

R er **refleksiv**, hvis

$(a,a) \in R$, for alle $a \in A$

Eks:

✓: $\leq$, $|\cdot|$, $=$, $|$

✗: $<$, $\neq$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?
graf -

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **symmetrisk**, hvis

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$, for alle $a,b \in A$

Eks:

✓: Samme paritet, $=$, $|\cdot|$, $\neq$

✗: $<$, $\leq$, $|$, R

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er symm.?
graf -