

Sidste gang:

Stærk induktion

Eks: Ethvert heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller

Basis: $4 = 2+2$, $5 = 5$

Indskridt: $k \geq 6$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad k-2 &= a \cdot 2 + b \cdot 5, \quad a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ind. ant.}) \\ k &= (a+1) \cdot 2 + b \cdot 5, \quad a+1, b \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Relationer

En relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

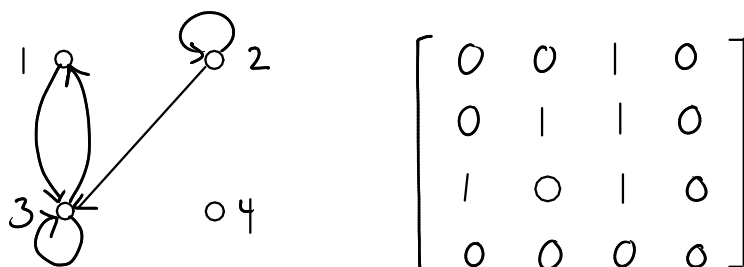
Generalisering af funktioner:

$f: A \rightarrow B$ knytter 1 y -værdi til hvert element i A

En relation fra A til B knytter 0, 1 eller flere
elementer fra B til hvert element i A .

En relation fra A til A kaldes en relation på A .

Eks: $R = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$ relation på $\{1,2,3,4\}$



R er

- ikke **refleksiv**, da $(1,1), (4,4) \notin R$
- ikke **symmetrisk**, da $(2,3) \in R$ og $(3,2) \notin R$.

1 dag:

Flere egenskaber: antisymmetrisk, transitiv

Lukninger

Äkvivalensrelationer

(Partielle ordninger)

Lukninger (afsnit 9.4)

R : relation på A

Den **refleksive lukning** af R er

$$r(R) = R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at R er refleksiv.

Eks:

$$\begin{aligned} r(R_<) &= \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \mid a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a < b \vee a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a \leq b\} \\ &= R_{\leq} \end{aligned}$$

Eks:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\} \text{ på } \{1,2,3,4\} \\ r(R) &= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Mere genvelt:

Def. 9.4.1

R : relation, P : egenskab

Lukningen af R mht. P (hvis den er defineret) er den mængde S , som opfylder

- $R \subseteq S$
- S har egenskaben P
- $S \subseteq T$, for enhver relation $T \supseteq R$ med egenskaben P (dvs. S er minimal)

D.v.s.

Den symmetriske lukning af en relation R er

$$S(R) = R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Eks:

$$S(R_<) = R_< \cup R_> = R_+$$

$$S(R_≤) = R_≤ \cup R_≥ = A \times A$$

$$S(\text{"samme paritet"}) = \text{"samme paritet"}$$

$$S(R) = R \cup \{(3,2)\}$$

$$= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **antisymmetrisk**, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

$\Leftrightarrow$

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b$$

$\Leftrightarrow$

$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R$$

Eks:

Anti-symmetrisk: $<, \leq, =, |$

Symmetrisk: $=$, samme paritet

Ingen af delene: $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$

Antisymmetrisk lukning? Findes ikke

Man kan ikke gøre en relation antisymmetrisk ved at tilføje elementer.

Def. 9.1.5

R : relation på A

R er **transitiv**, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \text{ for alle } a,b,c \in A$$

Eks:

✓: $\leq, <, =, | \cdot |, |$

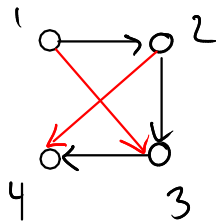
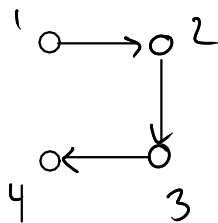
✗: $\neq, S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Eks: $S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

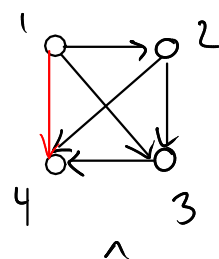
Den transitive lukning af S er:

$$\begin{aligned} t(S) &= S \cup \underbrace{\{ (1,3), (2,4) \}}_{S \circ S = S^2} \cup \underbrace{\{ (1,4) \}}_{S \circ S \circ S = S \circ S^2 = S^2 \circ S = S^3} \\ &= \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \} \end{aligned}$$

G_S :



$G_{t(S)}$:



Relationer kan sættes sammen, præcis som funktioner:

Def. 9.1.6:

R : relation fra A til B

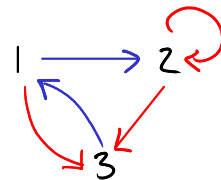
S : relation fra B til C

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$

Eks:

$$R = \{ (1, 2), (3, 1) \}$$

$$S = \{ (1, 3), (2, 2), (2, 3) \}$$

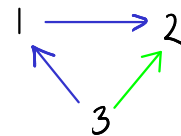


$$S \circ R = \{ (1, 2), (1, 3), (3, 3) \}$$

$$R \circ S = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$

$$R^2 = R \circ R = \{ (3, 2) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{ \}$$



$$R^* = R \cup R^2 = \{ (1, 2), (3, 1), (3, 2) \}$$

Def. 9.4.3

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

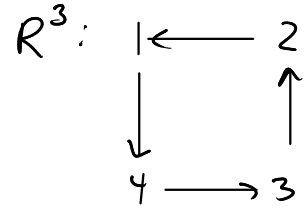
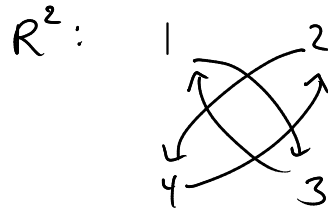
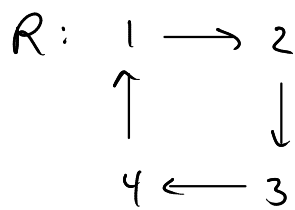
Bemærk:

$$(a, b) \in R^k \Leftrightarrow \exists \text{ vej af længde } k \text{ i } G_R$$

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \text{ hvis } A \text{ er endelig, fordi:}$$

Hvis der er en vej fra a til b , er der en vej fra a til b af længde højst $|A|$.

Exs: $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$



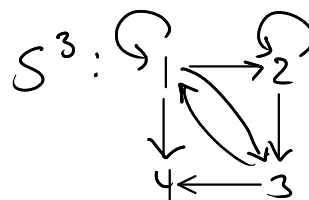
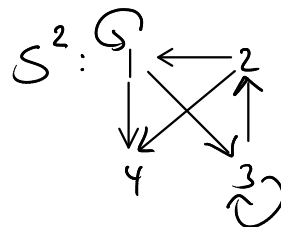
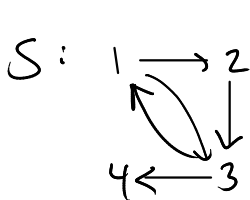
$$R^5 = R = R^9 = \dots$$

$$R^6 = R^2 = R^{10} = \dots$$



$$\begin{aligned}
 R^* &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 : \\
 &= \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}
 \end{aligned}$$

Exs: $S = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (3,4)\}$



S^4 :

```

    1 ↻ 1 → 2
    1 ↻ 1 → 3
    2 → 1
    2 → 3
    3 → 1
    3 → 2
  
```

$(= S \cup S^2)$

$S^* = S \cup S^2 \cup S^3$: