

Sidste gang:

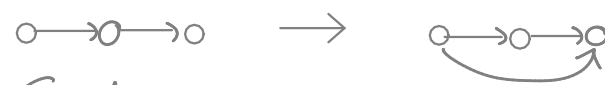
Lukninger

Refleksiv Tilføj loops / 1-taller

Symmetrisk Tilføj modsatrettede kanter / spejl l'ere

Anti-symmetrisk %.

Transitiv



Gentag

Relationer kan sammensættes, præcis som funktioner

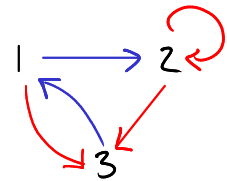
Eks:

$$R = \{(1,2), (3,1)\}$$

$$S = \{(1,3), (2,2), (2,3)\}$$

$$S \circ R = \{(1,2), (1,3), (3,3)\}$$

$$R \circ S = \{(1,1), (2,1)\}$$

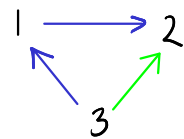


$$R^2 = R \circ R = \{(3,2)\}$$

$$R^3 = R \circ R \circ R = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{\}$$

$$= R^4 = R^5 = \dots$$

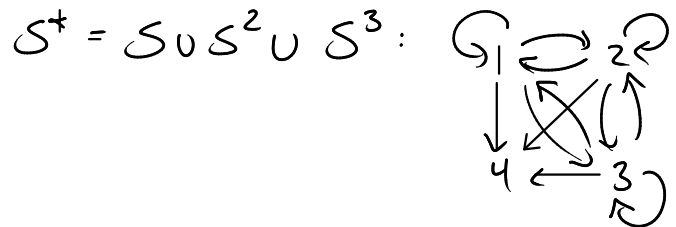
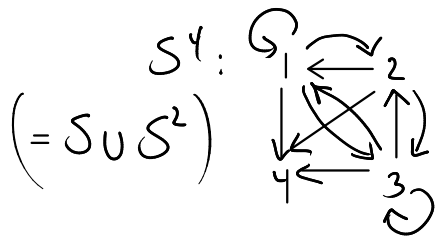
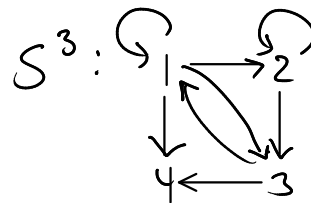
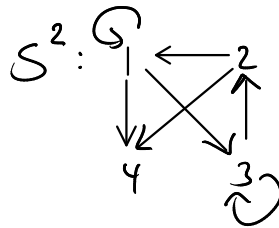
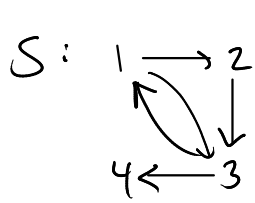
$$R^* = R \cup R^2 = \{(1,2), (3,1), (3,2)\}$$



$$S^2 = \{(2,2), (2,3)\} = S^3 = S^4 = \dots$$

$$S^* = S \cup S^2 = S$$

Exs: $S = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (3,4)\}$



1 dag:

Transitiv lukning

(afsnit 9.4)

Ækvivalensrelationer

(afsnit 9.5)

Partielle ordninger

(afsnit 9.6)

Talteori

(afsnit 4.1)

Sætning 9.4.2

Den transitive lukning, $t(R)$, af en relation R er givet ved $t(R) = R^+$

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def 9.5.1

En relation, som er reflektiv, symmetrisk og transitiv, kaldes en ækvivalensrelation

Eks:

$\checkmark$: $=$, samme paritet

$\%$: $\leq$, $|$, $\neq$

Def. 9.5.2:

Hvis R er en ækv.rel., og aRb , kaldes a og b ækvivalente

D.v.s. hvis R er en ækv.rel., og bRa , da er a og b ækvivalente (R er symmetrisk).

Def 9.5.3

Lad R være en ækv.rel. på A , og lad $a \in A$.

Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{b \mid (a,b) \in R\}$$

$$= \{b \mid (b,a) \in R\}$$

Eks: $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$

$$[0]_R = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = [0]_R = [4]_R = \dots$$

$$[3]_R = [1]_R = [5]_R = \dots$$

Bemærk: $[0]_R \dot{\cup} [1]_R = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: disjunkt forening)

Eks: $R = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øvelse 9.5.1:

Lad R være en ækv. rel. på A .

Da gælder

$$\uparrow aRb \quad (i)$$

$$\Downarrow [a]_R = [b]_R \quad (ii)$$

$$\Updownarrow [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \quad (iii)$$

Beris

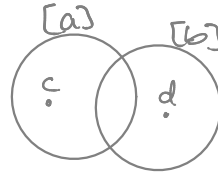
Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b]} : \quad ((i) \Rightarrow (ii))$$

Antag, aRb .

Da gælder også bRa , da R er **symmetrisk**

Kunne man forestille sig:



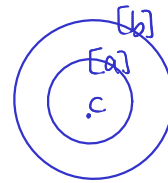
Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b]} :$$

$c \in [a]$
 $\Updownarrow$ aRc , per def.

$\Downarrow$ bRc , da bRa og R er **transitiv**

$\Updownarrow$ $c \in [b]$ per def.



$$\underline{[b] \subseteq [a]} :$$

Helt tilsvarende:

$d \in [b]$
 $\Updownarrow$ bRd , per def.

$\Downarrow$ aRd , da aRb og R er **transitiv**

$\Updownarrow$ $d \in [a]$

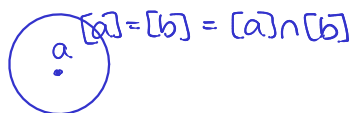


$$\text{O.v.s. } [a] = [b]$$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset :} \quad ((ii) \Rightarrow (iii))$$

Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er **refleksiv**



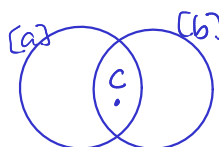
$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb :} \quad ((iii) \Rightarrow (i))$$

$$\Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge bRc$$

$$\Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{symmetrisk}$$

$$\Leftrightarrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{transitiv}$$



Sætning 1 kan bruges til at vise:

Sætning 9.5.2:

Lad A være en mængde. Da gælder

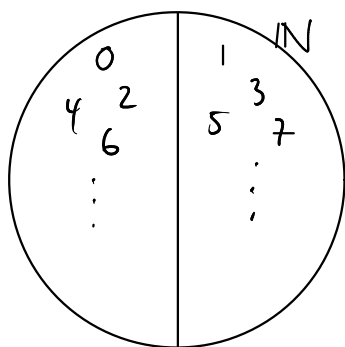
(1) R er en ækv.rel på $A \Rightarrow$

R 's ækv.klasser udgør en partitionering (disjunkt opdeling) af A .

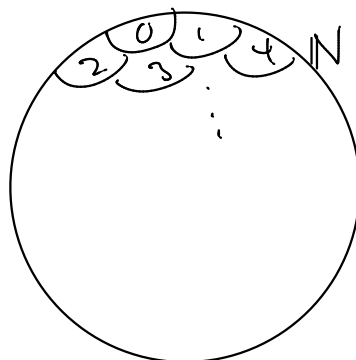
Det omvendte gælder også:

(2) For enhver partitionering af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i partitioneringen.

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$ på $\mathbb{N}$



$S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$



Beris for Sætning 9.5.2:

(1): Ækv.rel. $\Rightarrow$ partitionering: dvs. hvert element er indeholdt i præcis én mængde.

Ækv.klasserne dækker hele A , dvs $\bigcup_{a \in A} [a] = A$:

$a \in [a]$ for alle $a \in A$, da R er refleksiv

Dvs. ethvert element i A er indeholdt i en ækv.klasse.

Ækv.klasserne er disjunkte, dvs. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Kontraposition: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

↑
Sætning 1

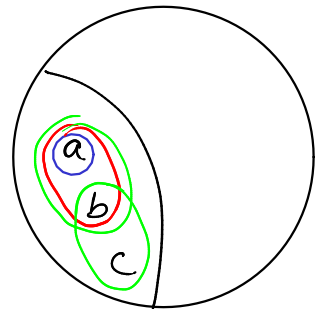
(2): Partitionering $\Rightarrow$ ækv.rel.:

Lad R være relationen defineret ved, at aRb , hvis og kun hvis a og b tilhører samme mængde i partitioneringen.

Vi skal vise, at R er en ækv.rel.

Refleksiv: for alle $a \in A$ gælder:

a tilhører samme mængde som a .



Symmetrisk: for alle $a, b \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

så tilhører b samme mængde som a .

Transitiv: for alle $a, b, c \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

og b tilhører samme mængde som c ,

så tilhører a samme mængde som c .

Partielle ordninger

(Afsnit 9.6)

Def 9.6.1

Hvis en relation R på en mængde A er
refleksiv, **antisymmetrisk** og transitiv,
kaldes den en **partiel ordening**.

(A, R) kaldes en **partielt ordnet mængde** (poset)

Eks:

$\sqrt{} :$ $\leq, =, |, \subseteq$

$\% :$ $<, \neq, \equiv, \subset$
refl. anti-sym. trans. refl.