

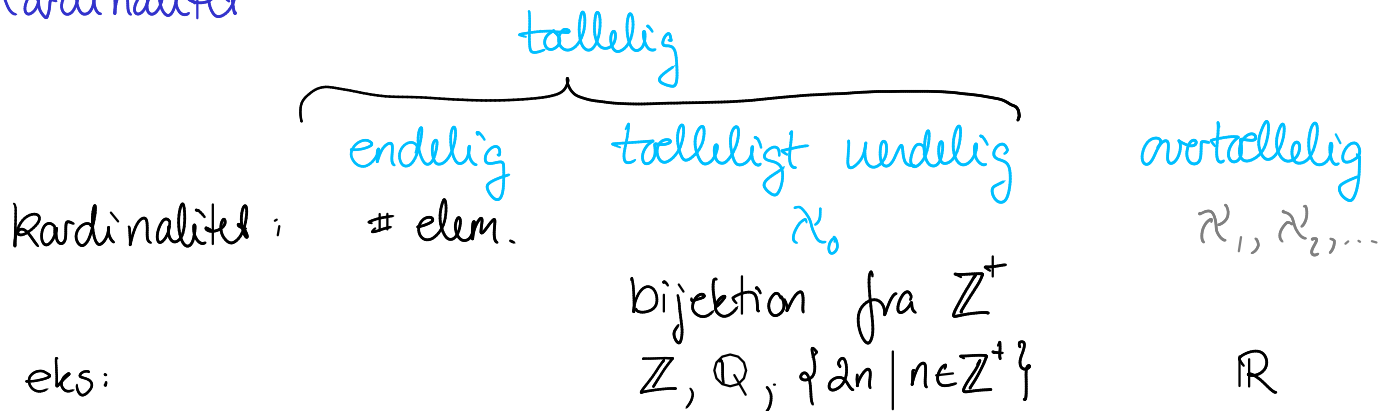
Sidste gang

Kongruenser

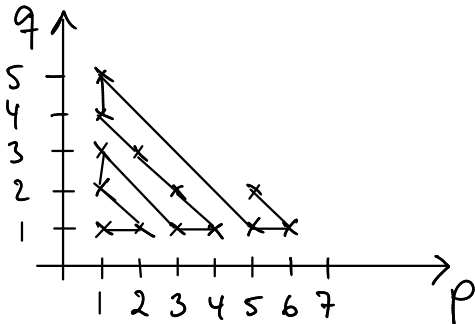
Man må dividere med c på begge sider,
hvis divisionen går op, og c er indbyrdes primisk
med modulus:

$$\begin{aligned} 36 &\equiv 21 \pmod{5} \\ \Downarrow \\ 12 &\equiv 7 \pmod{5} \end{aligned} \quad \gcd(3, 5) = 1$$

Kardinalitet



$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ er tællelig:



$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, 6, \frac{5}{2}, \dots$

$\mathbb{R}$ er overtællig:

Diagonalisering:

Lige gyldigt hvordan vi forsøger at oprense tallene i $\mathbb{R}$, vil der være et reelt tal, som ikke har en plads i oprensningsen:

$$0, d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots$$

$$0, d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots$$

$$0, d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots$$

$$S = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots, \text{ hvor}$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{hvis } d_{ii} = 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Eks:

$$0, 10000$$

$$0, 01000$$

$$0, 11000$$

$$0, 00100$$

$$0, 01100$$

$\vdots$

$$S = 0, 00111 \dots$$

Rekursive definitioner og struktural induktion (afsnit 5.3)

I uge 39 så vi på Fibonacci-tallene som eks. på rek. def.:

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{basis-skridt}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \text{rekursive skridt}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Eks: (Eksamen januar 2015)

$$a_0 = 0 \quad (\text{basis-skridt})$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1 \quad (\text{rekursive skridt})$$

0, 1, 3, 7, 15, 31, ...

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beris: Ved induktion over n .

Basis: ($n=0$)

$$2^0 - 1 = 0 = a_0$$

Ind. skridt: For $n \geq 1$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2^{n-1} - 1) + 1, \quad \text{ifølge ind. ant.} \\ &= 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

□

Eks 5:

$$3 \in S$$

$$x, y \in S \Rightarrow x+y \in S$$

Eller:

$$S_1 = \{3\}$$

$$S_n = S_{n-1} \cup \{x+y \mid x, y \in S_{n-1}\}, \quad n \geq 2$$

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

$$S_1 = \{3\}$$

$$S_2 = \{3\} \cup \{3+3\} = \{3, 6\}$$

$$S_3 = \{3, 6\} \cup \{3+3, 3+6, 6+6\} = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$S_4 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

$\vdots$

Eks 10:

$$S = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Bevis:

Lad $A = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

$A \subseteq S$:

Vi skal vise, at $3n \in S$ for alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

Dette gøres ved induktion over n :

Basis: ($n=1$)

$3 \in S$, ifølge basis-skridtet i def. af S .

Induktionsskridt: $n \geq 2$

$$3n = \underset{\substack{\nearrow \\ \in S, \text{ ifølge ind. ant.}}}{3(n-1)} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \in S, \text{ ifølge basis-skridtet i def.}}}{3}, \quad n-1 \geq 1$$

D.v.s. $3n \in S$ ifølge det rek. skridt i def.

$S \subseteq A$: Bevis ved struktural induktion

d.v.s. induktion over antallet af gange vi "bruger" det rekursive skridt i def.

Skal vise, at $s \in S \Rightarrow s \in A$

(Udsagnet $s \in S \Rightarrow s \in A$ kunne også skrives som

$\forall s \in S: s \in A$ eller $\forall s \in S: \exists k \in \mathbb{Z}^+: s = 3k$)

Basis: $s \in S_0 \Rightarrow s = 3 = 3 \cdot 1 \Rightarrow s \in A$

Ind. skridt:

$$s \in S_n, \quad n \geq 1$$

$\Downarrow$

$$s = x + y, \quad x, y \in S_{n-1}$$

$$= 3k + 3l, \quad k, l \in \mathbb{Z}^+, \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$= 3n, \quad n = k + l \in \mathbb{Z}^+$$

$\Downarrow$

$$s \in A$$

□

Beweis $P(S_n)$, $n \geq 0$, ved struktural induction:

- Basis $P(S_0)$
- Basis, at $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n)$ for all $n \geq 1$

Def. 5.3.5: Fulde binäre tracer

$$S_0 = \{ \bullet \}$$

(basisstap)

$S_0 = \{ \bullet \}$
 $S_n = S_{n-1} \cup \{ \bullet \mid T_1, T_2 \in S_{n-1} \}, n \geq 1$

(basisschritt)
 (rekursivschritt)

rod
 Untertracer

D. U. S.

$$S_1 = \{ \bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \}$$

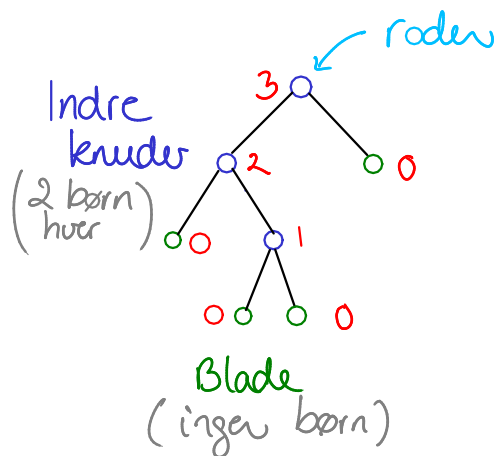
$$S_2 = \{ \bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \}$$

$$S_3 = \left\{ \text{---||---}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

$(|S_3| = 26)$

Lidt terminologi:

○ knude
 \ kant



} højde ($h=3$):
 #kanter på
 længste vej fra
 rod til et blad

Def 5.3.6

$$h(\circ) = 0$$

$$h\left(\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array}\right) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$$

Sætning 5.3.2:

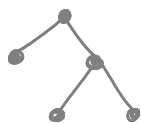
For ethvert fuldt binært træ T med $n(T)$ knuder og højde $h(T)$ gælder $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$

Eks :



$$n=3$$

$$h=1 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 3$$



$$n=5$$

$$h=2 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 7$$

Bevis: Ved struktural induktion

Basis: $S_0 = \{\bullet\}$

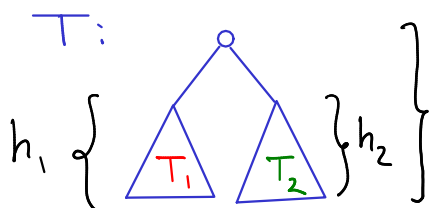
$$n = 1, h = 0$$

$$2^{h+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1 = n$$

Ind. ant: $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, for alle $T \in S_{n-1}$

Ind. skridt: $S_n, n \geq 1$

T :


$$\left. \begin{matrix} h_1 \{ \triangle T_1 \\ \triangle T_2 \} h_2 \end{matrix} \right\} h \stackrel{(*)}{=} \max\{h_1, h_2\} + 1, \text{ ifølge Def. 5.3.6}$$

$$T \in S_n, T_1, T_2 \in S_{n-1}$$

$$n(T) = n(T_1) + n(T_2) + 1$$

$$\leq \underbrace{2^{h_1+1} - 1}_{\leq h, \text{ ifølge } (*)} + \underbrace{2^{h_2+1} - 1}_{\leq h, \text{ ifølge } (*)} + 1, \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$\leq 2^h - 1 + 2^h$$

$$= 2^{h+1} - 1$$

□

Kunne også bevises ved stærk induktion over højden.