

Sidste gang

Matricer

$$A + B = C$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A \cdot B = C$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Matrix-mult. er **associativ**: $(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$

Matrix-mult. er **ikke kommutativ**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



kvadratiske, men ikke symmetriske

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ er } \text{symmetrisk}$$

D.v.s. $A = A^T$

For **transponeringen** M^T af en matrix M gælder

$$m_{ij}^T = m_{ji}$$

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Identitetsmatrix

For en $n \times m$ matrix A gælder:

$$I_n \cdot A = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \boxed{A} = \boxed{A}$$

$$A \cdot I_m = A$$

$$\boxed{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{A}$$

Forrige gang

Fermats Lille Sætning:

p primtal:

$$(1) \quad p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(2) \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

Vi brugte (1) til at beregne $7^{222} \pmod{11} = 5$

Følger

Geometriske følger: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$1, 2, 4, 8, \dots$

Aritmetriske følger: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$

Eks: $1, 2, 3, 4, \dots$

$1, 3, 5, 7, \dots$

$3, 10, 17, 24, 31, \dots$

Mandelbrot følger: $X_n = X_{n-1}^2 + c$

Rækker

Geometriske rækker: $\sum_{i=1}^n ar^i$ eller $\sum_{i=1}^{\infty} ar^i$

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

$$\text{Eks: } 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \frac{32 - 1}{1} = 31$$

Illustration v.h.a. binære tal:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ \hline 1111 + 1 = 10000 \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 + 10 + 100 + 1000 = 10000 - 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

$$\text{Eks: } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

Aritmetrisk rekke

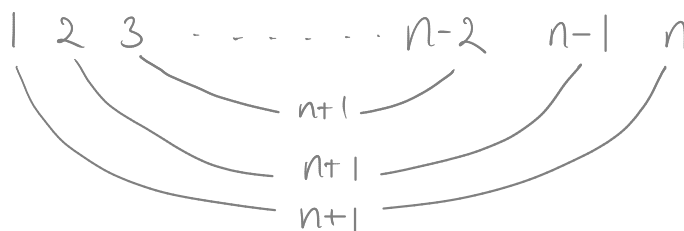
$$\sum_{i=0}^n (a+id) = \sum_{i=0}^n a + d \sum_{i=0}^n i$$

$$= (n+1)a + d \sum_{i=0}^n i$$

$$= (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2}$$

Tabell 2, s. 166, 2. linje
Beviset tidligere i kurset
o.h.a. induktion.

Alternativt bevis for $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$:



n lige:

$\frac{n}{2}$ par med sum $n+1$

n ulige:

$\frac{n-1}{2}$ par med sum $n+1$

Midtste tal: $\frac{n+1}{2}$

$$| \text{ alt: } \frac{n-1}{2} (n+1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n-1+1}{2} (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Eks: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n+1 = \sum_{i=0}^n (1+2i)$

$$= (n+1) \cdot 1 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n+1 + n(n+1)$$

$$= (n+1)(n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

Summer dukker f.eks. op, når vi skal beregne
#gennemløb af et loop (for at anslå køretid
af en algoritme):

for $i:=1$ to 10

 for $j:=1$ to 20

 ...

$$\# \text{gennemløb} = 10 \cdot 20 \left(= \sum_{i=1}^{10} 20 \right) = 200$$

for $i:=1$ to 10

 for $j:=1$ to i

 ...

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

for $i:=5$ to 10

 for $j:=1$ to i

 ...

$$\begin{aligned} \# \text{gennemløb} &= \sum_{i=5}^{10} i = \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^4 i = 55 - \frac{4 \cdot 5}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

For $i:=1$ to 3

For $j:=1$ to i

For $k:=1$ to j

...

$$\# \text{ generated } = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^3 \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{i^2 + i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i$$

Table 2, Line 2 of 3

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \right) + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$= 7 + 3 = 10$$

Notation

$$\sum_{i=1}^5 i = \sum_{1 \leq i \leq 5} i = \sum_{i \in A} i, \text{ hvor } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Eks: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n$
 (n'te harmoniske tal)

← Hvorfor?
 (Svaret kommer i Adams, Essex)

Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pakker med et klistermærke i hver.
 n forskellige klistermærker.

For at få et af hver slags skal man i
 gennemsnit købe nH_n pakker:

Forventet #pakker inden man har 1 klistermærke: $= \frac{n}{n}$

Forventet ekstra #pakker før man har 1 mere: $\frac{n}{n-1}$

": $\frac{n}{n-2}$

": $n = \frac{n}{1}$

$$\begin{aligned} \text{alt: } & \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ & = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1} \right) \end{aligned}$$