

Sidste gang

både orienterede og ikke-orienterede kanter
Multiple kanter og loops

Graftyper:

Ikke-orienteret, orienteret, blandet

Simpel, multigraf, pseudograf

↑
parallelle kanter
(loops, hvis orienteret)

↖
loops
ikke-orienteret

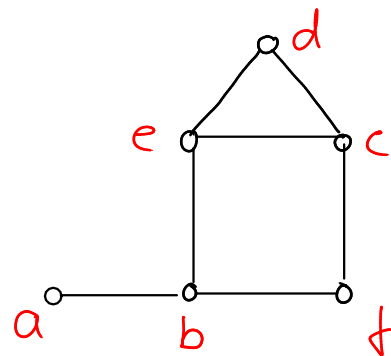
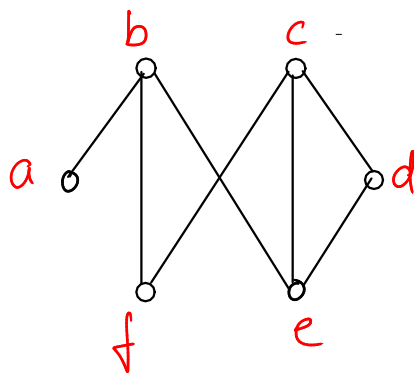
} Tabel 10.1.1

Repræsentation:

Adjacenslister

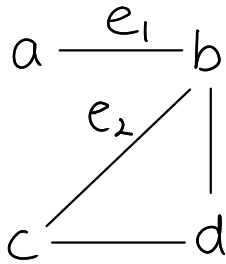
Adjacensmatrixer

Isomorfi:



Terminologi af grafklasser

(Afsnit 10.2)



a og b er **naboer** / **adjacente**.

e_1 og e_2 er **adjacente**.

e_1 er **incident** til a og b.

e_1 **forbinder** a og b.

d's naboer

$N(d) = \{b, c\}$ er d's **nabomængde**.

$$N(\{c, d\}) = N(c) \cup N(d) = \{b, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$$

Graden af a er $\deg(a) = 1$, da a er endepunkt for 1 kant

$$\deg(b) = 3$$

$$\deg(c) = \deg(d) = 2$$

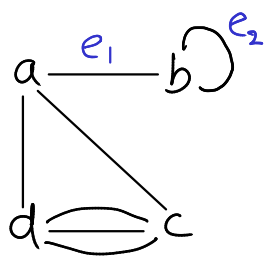
$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 1 + 3 + 2 + 2 = 8 = 2 \cdot \# \text{kanter}$$

↑
Håndtryks-Sætninger (Sætning 1)
(gælder også multigrafen)

Håndtryks-Sætninger medfører:

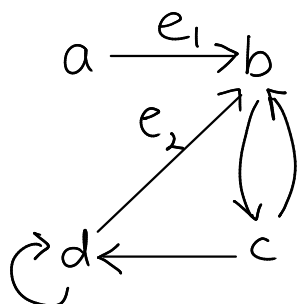
Sætning 2: Enhver ikke-orienteret graf har et lige #knuder med ulige grad.



$$\deg(a) = 3$$

$\deg(b) = 3$, da b er endepunkt for e_1
og udgør begge endepunkter for e_2

$$\deg(c) = \deg(d) = 4$$



Indgrader af a er $\deg^-(a) = 0$

Udgrader af a er $\deg^+(a) = 1$

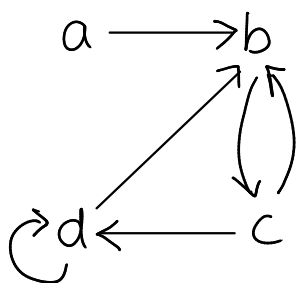
$$\deg^-(b) = 3, \quad \deg^+(b) = 1$$

$$\deg^-(c) = 1, \quad \deg^+(c) = 2$$

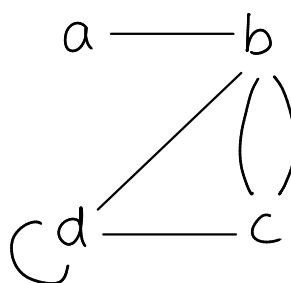
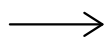
$$\deg^-(d) = 2, \quad \deg^+(d) = 2$$

Sætning 3: $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$

Hvis man fjerner orienteringen af kantene, får man den underliggende ikke-orienterede graf:



Orienteret graf



Underliggende
ikke-orienterede graf

Særlige grafklasser:

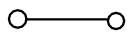
Komplette grafer

K_n : Grafer med n knuder, hvor alle par af knuder er naboer

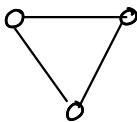
K_1 :



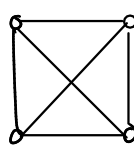
K_2 :



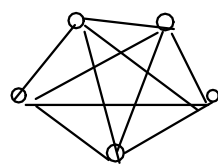
K_3 :



K_4 :



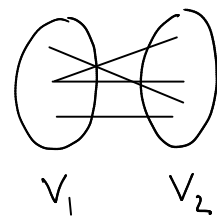
K_5 :



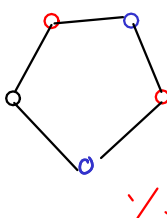
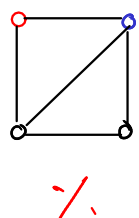
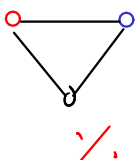
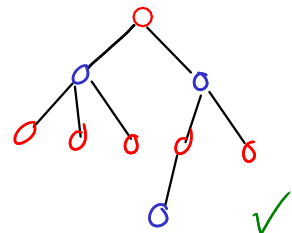
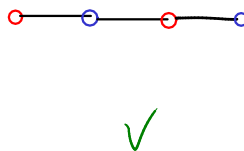
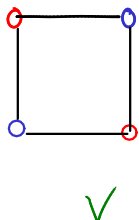
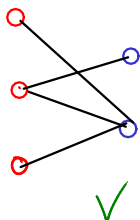
...

Todelte grafer

Knudemængden kan deles i to mængder V_1 og V_2 , sådan at ingen kant har begge endepunkter i V_1 eller i V_2 .
(V_1 og V_2 er uafhængige mængder)



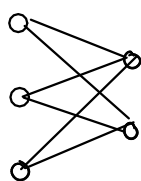
Eks:



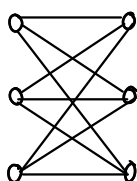
Øøbning 10.2.4

En simpel graf er todelt, hvis og kun hvis den kan tofarves

Komplette todelte grafer:



$K_{3,2}$



$K_{3,3}$

Træer (Afsnit 11.1)

Def. 11.1.1

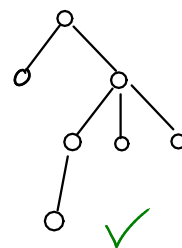
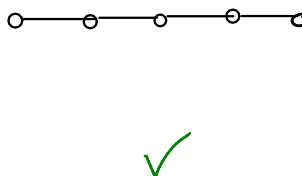
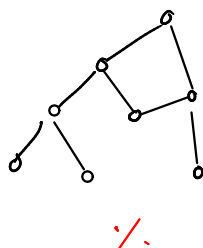
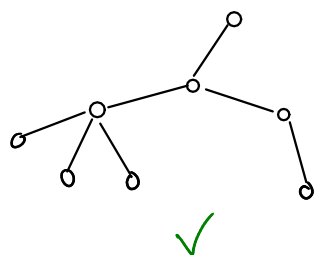
Et træ er en ikke-orienteret, sammenhængende, acyklisk graf.

↑
ingen kredse

↑
veje mellem ethvert par af knuder

En graf bestående af træer kaldes en skov.

Eks:



Øøtning 11.1.1

$G = (V, E)$: ikke-orienteret graf

$\Updownarrow$ G er et træ

$\forall u, v \in V: \exists!$ vej mellem u og v

Bevis:

$\Downarrow$: ≥ 1 vej:

G er et træ $\stackrel{\text{Def. 1}}{\Rightarrow} G$ er smh.

$\Leftrightarrow \geq 1$ vej ml. hvert par af knuder

≤ 1 vej:

G er et træ $\stackrel{\text{Def. 1}}{\Rightarrow} G$ er acyklisk

Viser acyklisk $\Rightarrow \leq 1$ vej ved kontraposition:

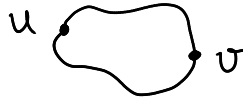
to veje $\Rightarrow$ kreds:



De to veje splitter op (tidligst ved u) og samles igen (senest ved v).

$\uparrow$: ≥ 1 vej mellem hvert knudepar $\Leftrightarrow$ smh.

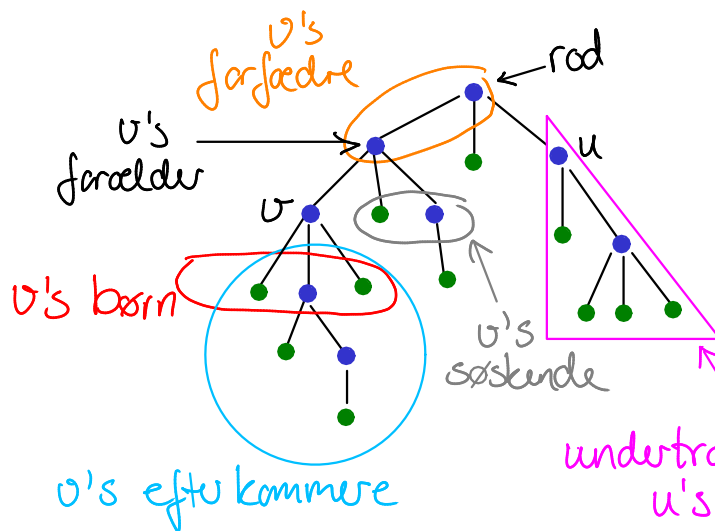
≤ 1 vej mellem hvert knudepar $\Rightarrow$ acyklisk
vises ved kontraposition:



$\exists$ kreds $\Rightarrow \exists$ knudepar med to veje mellem sig □

Træer med rod

(rooted trees)



indre knuder

blade (alle knuder $\neq$ roden
som har præcis
en nabo)

undertræet med rod i u /
u's undertræ

Sætning 11.1.2

Et træ med n knuder har $n-1$ kanter.

Bevis ved induktion over n :

Basis: $n=1$

Et træ med kun 1 knude har 0 kanter

Ind. ant:

Et træ med n knuder har $n-1$ kanter.

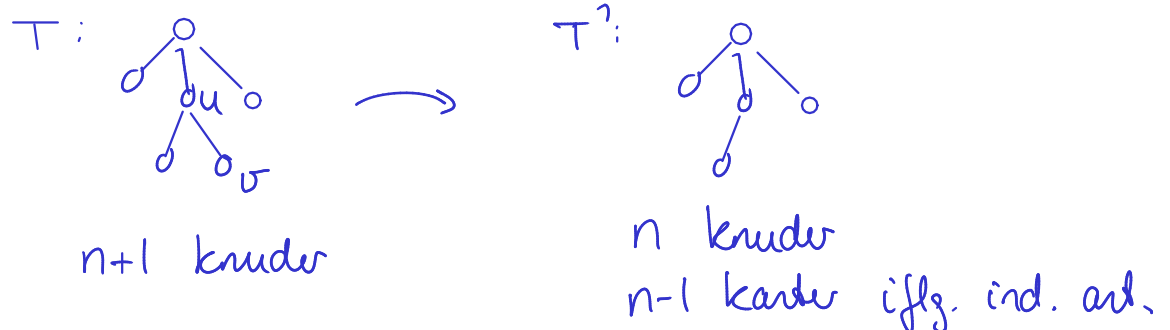
Ind. skridt: $n \geq 1$

Lad T være et vilkårligt træ med $n+1$ knuder.

Vælg en knude som rod.

Lad v være et blad i T , og lad u være v 's forælder.

Lad T' være træet, som opnås ved at fjerne u og kanten ml. u og v fra T :



T' har $n \geq 1$ knuder.

Ifølge ind. ant. har T' $n-1$ kanter.

Da T har 1 kant mere end T' , har T n kanter.

