

Sidste gang

Afsnit 10.2:

Terminologi

Grad

Sætning 1: Håndtrykssætningen

Sætning 2: #knuder med ulige grad er lige

Indgrad, udgrad

Sætning 3: Total indgrad = total udgrad = $|E|$

Unduliggende graf

Grafklasser

Komplette grafer

Todelte grafer

Afsnit 11.1:

Træer

Træer kan defineres på mange forskellige måder:
(kommer I til at bruge i DMS07)

For en ikke-orienteret graf G med n knuder gælder:

- G er et træ
- $\Updownarrow$ G er smh. & acyklisk (Def. 1)
- $\Updownarrow$ Træ $\Leftrightarrow \exists!$ vej ml. hvert knudepar (Sætning 1)
- $\Updownarrow$ G er smh. og har $n-1$ kanter (Opgave 15a)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk og har $n-1$ kanter (Opgave 15b)
- $\Updownarrow$ G er smh., men
- $\Updownarrow$ $\forall e \in E: G-e$ er ikke smh. (Opgave 14)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk, men
- $\forall u, v \in V: G + \{u, v\}$ er ikke acyklisk

I opgave 15 kan man bruge

Sætning 2: Et træ med n knuder har $n-1$ kanter

Følger og konvergens

Adams, Essex afsnit 9.1

Eks: $\{(\frac{1}{2})^n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Terminologi:

Def 1

(a) $a_n \geq L$, for $n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$

- $\{a_n\}$ er **begrænset nedefra** af L
- L er en **nedre grænse** for $\{a_n\}$

$a_n \leq M$, for $n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$

- $\{a_n\}$ er **begrænset overfra** af M
- M er en **øvre grænse** for $\{a_n\}$

$\{a_n\}$ er begrænset både nedefra og overfra $\Rightarrow$

- $\{a_n\}$ er **begrænset**
- $\exists K : \forall n \in \mathbb{Z}^+ : |a_n| \leq K$
(F.eks. $K = \max\{|L|, |M|\}$)

(b) $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_n \geq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ er **positiv**

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_n \leq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ er **negativ**

(c) $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \{a_n\}$ er **voksende**

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \{a_n\}$ er **aftagende**

$\{a_n\}$ er voksende eller aftagende $\Rightarrow \{a_n\}$ er **monoton**

(d) $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_n a_{n+1} < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ er **alternierende**

Eks: $\{(\frac{1}{2})^n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Begrænset nedefra af 0

Begrænset ovenfra af 0

D.v.s. begrænset

Positiv

Aftagende

D.v.s. monoton

Eks: $\{\frac{n^2}{2^n}\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots$

$\swarrow \quad \searrow$

$\approx 0,78 \quad \approx 0,56 \quad \approx 0,38$

Ultimativt aftagende

(fra $n=3$)

Eks: $\{n-100\} = -99, -98, -97, \dots$

Ultimativt positiv

(fra $n=100$)

Eks: $\{a_n\} = \{(\frac{1}{2})^n\}$

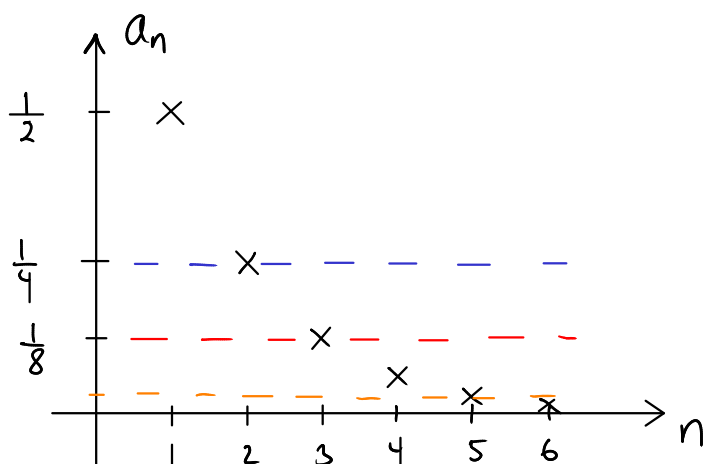
$\{a_n\}$ er **ultimativt** begrænset overfra af 0,01.
(fra $n=7$)

Faktisk er $\{a_n\}$ **ultimativt** begrænset overfra af
ethvert $\varepsilon > 0$.

Desuden er $\{a_n\}$ begrænset nedefra af 0.

Det betyder, at

$\{a_n\}$ **konvergerer** mod 0:



$$a_n < \frac{1}{4}, \text{ for } n \geq 3$$

$$a_n < \frac{1}{8}, \text{ for } n \geq 4$$

$$a_n < \frac{1}{32}, \text{ for } n \geq 6$$

Generelt: $a_n < \varepsilon$, for $n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, fordi

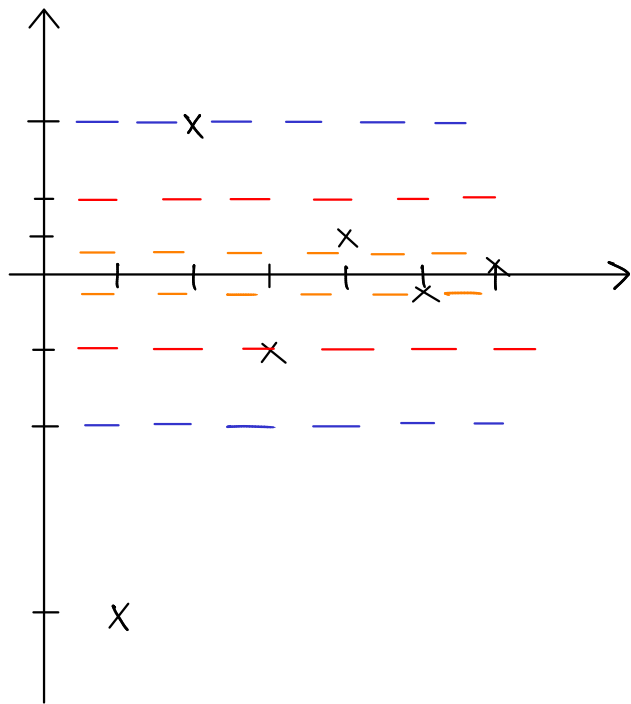
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

D.v.s.: Ligegyldigt hvor lille ε er, findes
der et N , der er så stort, at
 $a_n < \varepsilon$ for alle $n > N$.

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n < \varepsilon$

Eks: $\{b_n\} = \{(-\frac{1}{2})^n\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$\{b_n\}$ konvergerer mod 0:



$$|b_n| < \frac{1}{4}, \text{ for } n \geq 3$$

$$|b_n| < \frac{1}{8}, \text{ for } n \geq 4$$

$$|b_n| < \frac{1}{32}, \text{ for } n \geq 6$$

Generelt: $|b_n| < \varepsilon, \text{ for } n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

D.v.s.: Ligeegyldigt hvor lille ε er, findes der et N , der er så stort, at afstanden ml. b_n og 0 er mindre end ε , for alle $n \geq N$.

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |b_n| < \varepsilon$

Def 2

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L \in \mathbb{R}$.
Hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

da

konvergerer $\{a_n\}$ mod grænseværdien L

↑ 0 : eks overfor

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ skrives også som

$$a_n \rightarrow L \text{ for } n \rightarrow \infty$$

↑
„går imod“

↑
„går mod“

En følge, som ikke konvergerer, **divergerer**.

Eks 5:

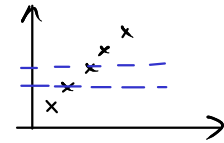
$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad \text{konverger mod } 1$$

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

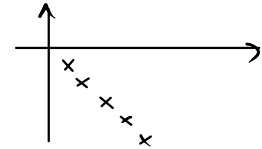
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

D.v.s. vi kan f.eks. vælge $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ i Def. 2

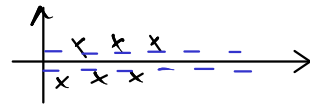
$$\{n\} = 1, 2, 3, \dots \quad \text{divulger mod } \infty$$



$$\{-n\} = -1, -2, -3, \dots \quad \text{divulger mod } -\infty$$



$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots \quad \text{divulger}$$



Regneregler for grænseværdier (s. 499 ø.):

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\begin{aligned} \text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Tilsvarende for $-$ og $\cdot$
og for $/$, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Eks 6a:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \\&= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tommelfingerregel:

Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.

Sætning 3

$$(a) |x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$$(b) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Bevis:

(a): (Beviset er en smule anderledes end i bogen)

Af Def. 2 fås:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x|^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \ln |x| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}, \quad \text{da } |x| < 1 \Rightarrow \ln |x| \neq 0$$

under ulighedstegnet, da vi dividerer med noget negativt

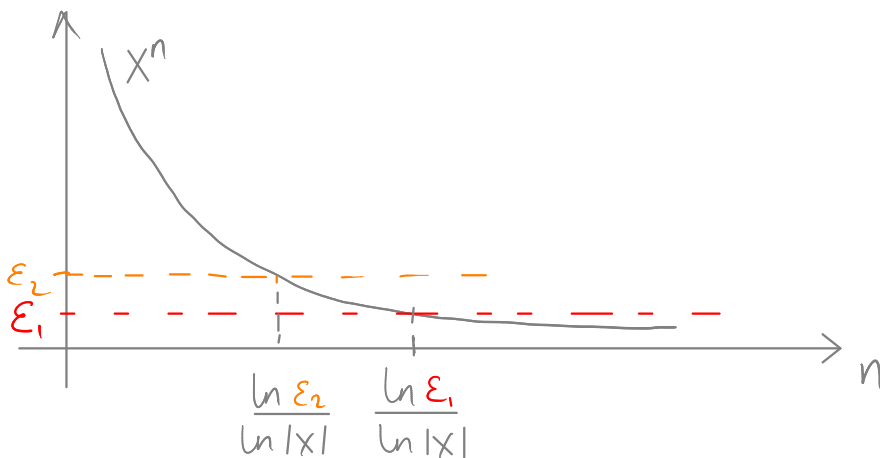
D.v.s.

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \Rightarrow |x^n| < \varepsilon$$

M.a.o.:

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} : |x^n| < \varepsilon$$

Illustration:



(b) Bevises i næste uge...