

Sidste gang

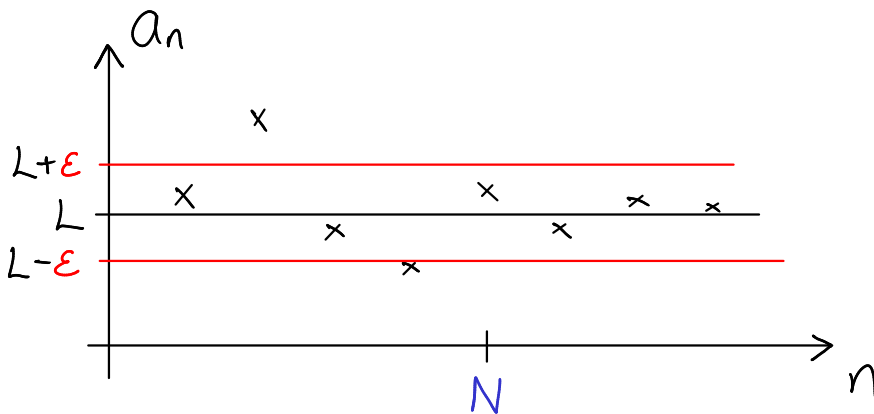
Hvis $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$,

siger man, at

- $\{a_n\}$ konvergerer mod L
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- grænseværdien for $\{a_n\}$ er L
- $a_n \rightarrow L$ for $n \rightarrow \infty$

Ellers

siges $\{a_n\}$ at divergere.



Eks:

$\{(\frac{1}{2})^n\}$ konvergerer mod 0

$\{n\}$ divergerer mod ∞

$\{-n\}$ divergerer mod $-\infty$

$\{(-1)^n\}$ divergerer

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder flg. regneregler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

-
+
/

-
+
/

, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sætning 3

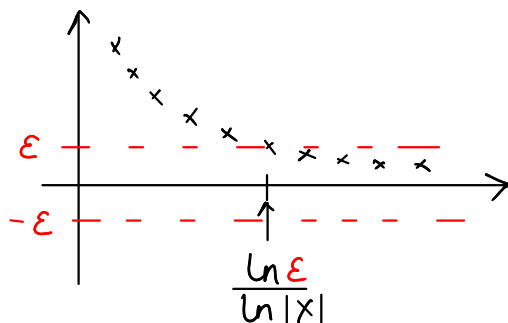
For ethvert $x \in \mathbb{R}$ gælder

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, hvis $|x| < 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Bevis:

(a) $\forall \varepsilon > 0 : \forall n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} : |x^n| < \varepsilon$



(b) :

Eks: $x=2$

$n=5$:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2^5}{5!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\frac{x}{n}}$$

$n=10$:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{10}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_2 \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{<1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\frac{x}{n}}$

Generelt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{|x| \cdot |x| \cdot \dots \cdot |x|}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \\ &= \underbrace{\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil}}_{\substack{\text{afhænger kun af } x, \\ \text{ikke af } n}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}}_{< \frac{|x|}{n}} \end{aligned}$$

$$< C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil} = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{x^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!} \\ &= C \cdot |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \quad \text{if. regneregler for grænseværdier} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Klar, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \gg 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

□

Eks 10 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n + \left(\frac{4}{5} \right)^n + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n + 1 \\ &= 0 + 0 + 1, \text{ ifølge Sætning 3(a)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Uendelige rækker

(afsnit 9.2)

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Def 3

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes rækkens n 'te partielle sum

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$,

siges rækken at konvergere mod s .

Dette skrives også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks: $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

D.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Geometriske rækker

$$\sum_{i=0}^n r^i = \sum_{i=1}^{n+1} r^{i-1} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, \quad \text{for } r \neq 1$$

D.v.s.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \stackrel{\text{for } r \neq 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \infty, & \text{hvis } r > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverger, hvis } r \leq -1.$$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \text{ diverger:}$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = -3, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = -21, \dots$$

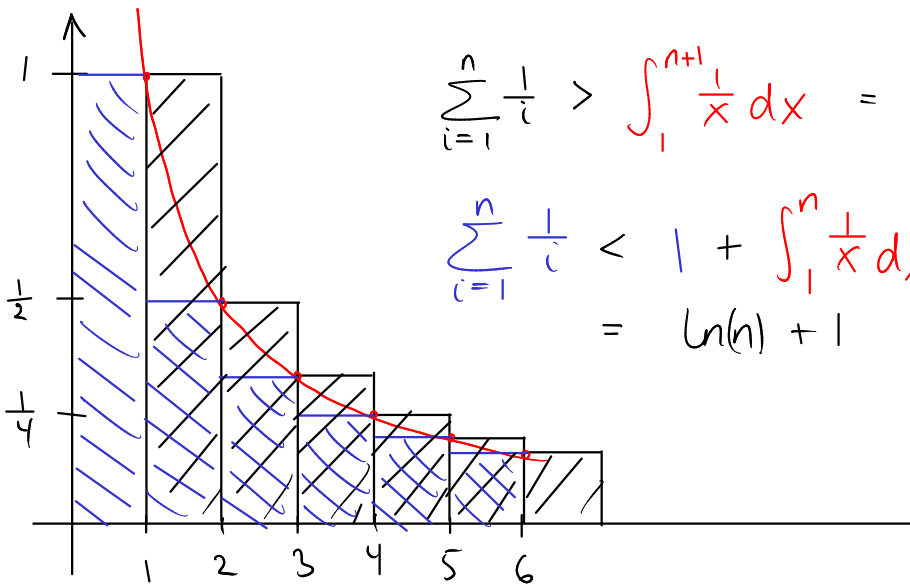
og udslagene bliver større og større.

Eks 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{Harmoniske række}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n\text{'te harmoniske tal}$$

H_n optræder i mange forskellige sammenhænge, f.eks. i Coupon Collector's Problem, som vi så tidligere.



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = \ln(n) + 1$$

D.v.s. $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .

Sætning 4

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

~~✱~~

D.v.s. (ved kontraposition)

$\{a_n\}$ konvergerer ikke mod 0

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

Beris:

Hvis s_n skal konvergere, må $s_n - s_{n-1} = a_n$ gå mod 0:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

$\Updownarrow$

$$\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$



$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Husk, at det modsatte ikke gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverger.

Eks 5(a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \text{ diverger, da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$$

Konvergens afhænger kun af rækkens hale (tail):

Sætning 5

$$\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \\ \updownarrow \\ \forall N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \end{array}$$

Bevis: Opgave 23.

D.v.s. det er OK blot at anvende konvergens-kriterierne i afsnit 9.3 på rækkens hale.

Sætning 6

Lad $\{a_n\}$ være en ultimativt positiv følge,
og lad $\{s_n\}$ være dens partielle summer.

Hvis $\{s_n\}$ er begrænset ovenfra, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ellers er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Bevis: Opgave 24.

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regnearbejder, som vi mødte i afsnit 9.1. Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$, for alle $n \geq 1$
 $\downarrow$
 $A \leq B$

Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} \quad \text{i mange tilfælde.}$$

(herfor?)

Illustration:

$$\sum_{n=1}^2 a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 a_n \cdot \sum_{n=1}^2 b_n &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$$