

Sidste gang

$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes rækkes n 'te partielle sum

Hvis $\{s_n\}$ konvergerer eller divergerer mod $\pm\infty$, er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Geometriske rækker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \begin{cases} \text{divergerer,} & \text{hvis } r \leq -1 \\ \text{konvergerer mod } \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \end{cases}$$

Sætning 4:

$$\neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Sætning 5: For ethvert $N \in \mathbb{Z}^+$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Sætning 6: Lad $\{a_n\}$ være ultimativt positiv.

Hvis $\{s_n\}$ er begrænset ovenfra, konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ellers div. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mod uendelig.

Konvergens-kriterier for positive rækker

(afsnit 9.3)

Sætning 8 (Integral-Kriteriet)

Hvis $a_n = f(n)$, hvor

f er positiv, kontinuert og aftagende på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$,
da gælder enten

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\int_N^{\infty} f(x) dx$ konvergerer begge

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_N^{\infty} f(x) dx = \infty$$

Beweis:

Da f og $\{a_n\}$ er positive, har integral og række
hver især kun to muligheder:

at konvergere eller at divergere mod ∞ .

D.v.s. sætningen siger blot, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

Ifølge Sætning 5 behøver vi kun se på rækkes hale:

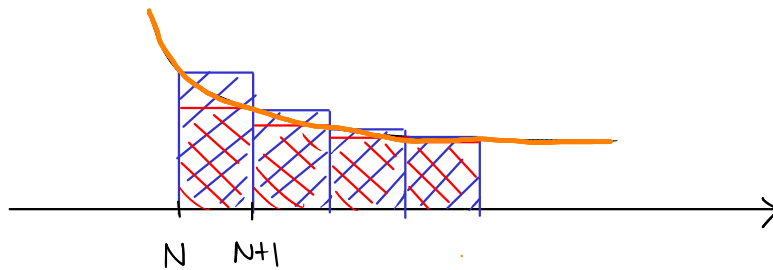
For ethvert $N \in \mathbb{Z}^+$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Vi bruger undv- og oversummer som i Eks 9.2.4 om H_n :

Da f er aftagende gælder, at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \stackrel{(*)}{\leq} \int_N^{\infty} f(x) dx \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=N}^{\infty} a_n :$$



Af $(*)$ og Sætning 6 fås:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Af $(**)$ og Sætning 6 fås:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n = \infty$$

□

Generalisering af H_n :

p -rækker (Eks. 1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{div. mod } \infty, & \text{hvis } p \leq 1 \\ \text{konv.}, & \text{hvis } p > 1 \end{cases}$$

Bevis:

$p \leq 0$:

$$\frac{1}{n^p} = n^{\overbrace{-p}^{\geq 0, \text{ da } p \leq 0}} \geq n^0 = 1$$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \geq 1$$

$$\text{D.v.s. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty, \text{ ifølge Sætning 4.}$$

$p > 0$: Bruger Integral-Kriteriet (Sætning 8)

$$\underline{0 < p < 1}: \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \overset{1-p > 0}{=} \infty - \frac{1}{1-p} = \infty$$

$$\underline{p=1}: \int_1^{\infty} x^{-1} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

$$\underline{p > 1}: \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \overset{1-p < 0}{=} 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

□

p -rækker kan være nyttige i kombination med Sætning 9 og 10:

Sætning 9 (Sammenlignings-Kriteriet)

(Comparison Test)

Hvis $0 \leq a_n \leq K b_n$ ultimativt, $K \in \mathbb{R}^+$,
da gælder:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n \\ \Updownarrow & \\ & \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} K b_n, \text{ ifølge Sætning 7(c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Updownarrow & \\ & \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq K \sum_{n=N}^{\infty} b_n, \text{ ifølge Sætning 7(a)} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 6}$$

$$\Updownarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 5}$$

(b): Da $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er ultimativt positive, er
(b) blot det kontrapositive af (a).

□

Eks 3"

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n+1}}$ konvergerer ifølge Sætning 9(a) (med $K=4$):

$$0 \leq \frac{4}{2^{n+1}} < \frac{4}{2^n} = 4 \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ og}$$

$\{\frac{1}{2^n}\} = \{(\frac{1}{2})^n\}$ er en konvergent geometrisk følge.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergerer ifølge Sætning 9(b):

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2, \text{ og}$$

$\frac{1}{n}$ divergerer ifølge Eks. 1

Husk, at Sætning 9 ikke siger, at $\sum a_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum b_n$ konvergerer

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2}$ kan godt afgøres v.h.a.

Sætning 9, men det er nemmere at bruge Sætning 10...

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grænse-sammenlignings-kriteriet)

(Limit Comparison Test)

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

$$(a) \quad (L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \quad (L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\begin{aligned} & L < \infty \\ \Downarrow & \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + 1, \text{ ifølge Def. 2} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$$

$$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 9(a)}$$

$$(b): \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}, \text{ ifølge Def. 2 (med } \varepsilon = \frac{L}{2})$$

$$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > \frac{L}{2} \cdot b_n$$

$$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ ifølge Sætning 9(b)}$$

□

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{4}{n}}$

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2} \bigg/ \frac{1}{n} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{5n^3 + 4n^2} \rightarrow \frac{2}{5} \text{ for } n \rightarrow \infty$$

D.v.s. rækken diverger ifølge Sætning 10(b) og Eks. 1.

Bemærk: Grænseammenligningskriteriet sammenligner tilsvarende led i to forskellige rækker.

Kvotientkriteriet sammenligner nabo-led inden for samme række:

Sætning 11 (Kvotient-Kriteriet)

(Ratio test)

Hvis

- $a_n > 0$ (ultimativt)
- $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er uendelig

da gælder

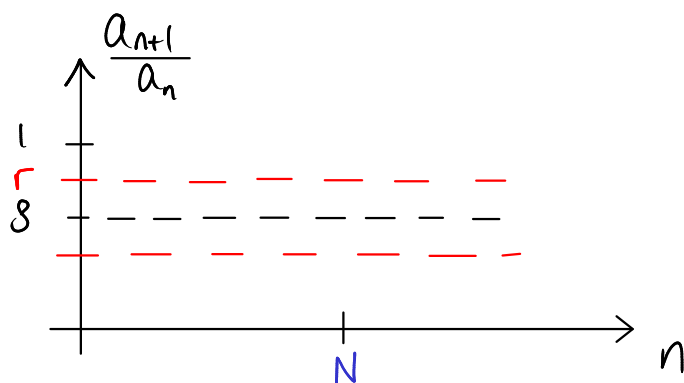
(a) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $\rho > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(c) $\rho = 1$: ingen information

Bevis:

(a):



Ifølge Def. 2:

$$\forall r > s : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

Da $s < 1$, findes der altså et $r < 1$, sådan at:

$$a_{N+1} \leq r a_N$$

$$a_{N+2} \leq r \cdot a_{N+1} \leq r^2 \cdot a_N$$

$$a_{N+3} \leq r \cdot a_{N+2} \leq r^3 \cdot a_N$$

$\vdots$

D.v.s.

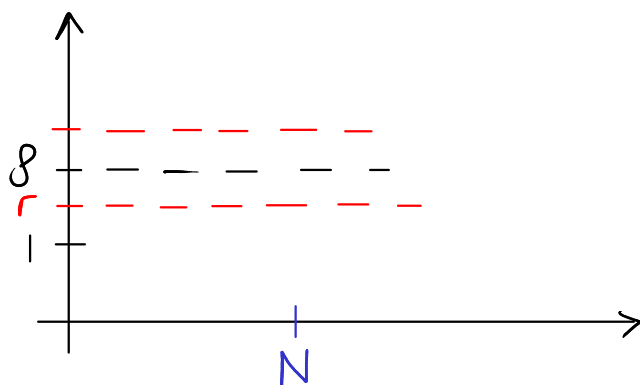
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

$$\leq a_N + r \cdot a_N + r^2 \cdot a_N + \dots$$

$$= a_N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (\text{geometrisk række})$$

$$= \underbrace{a_N \cdot \frac{1}{1-r}}_{\in \mathbb{R}}, \quad \text{da } r < 1$$

(b): Tilsvarende:



$$a_{N+1} \geq r a_N$$

$\vdots$

$$a_{N+k} \geq r^k a_N$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq a_N \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \infty, \text{ da } r > 1$$

(c): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverger, og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverger, men

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{og}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$$

□

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ diverger:

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ konverger:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 / 2^{n+1}}{n^5 / 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Bemærk, at vi ikke kunne have bevist dette ved at bruge (Grænse-)Sammenligningskriteriet til at sammenligne rækker med $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, da

$$\frac{n^5 / 2^n}{1/2^n} = n^5 \rightarrow \infty \text{ for } n \rightarrow \infty$$