Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM02)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Mandag den 17. januar 2005, kl. 9–13

Løsningsforslag

Opgave 1 (15%)

Spørgsmål a: Kun T_1 er et rødsort træ.

Alle fire træer har sort rod og sorte blade.

For T_1 gælder desuden:
— Ingen rød knude har et rødt barn.
— T_1 er et søgetræ.
— For enhver knude v i T_1 gælder, at alle stier fra v til et blad har det samme antal sorte knuder.

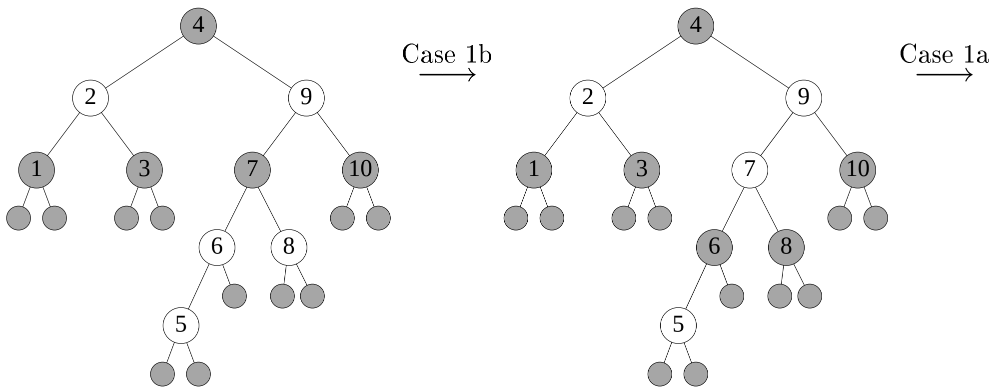
Ikke alle stier fra roden i T_2 har det samme antal sorte knuder.

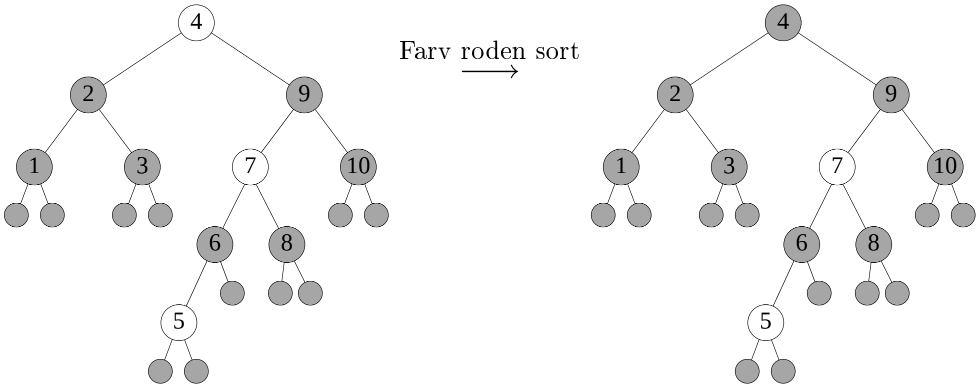
T_3 er ikke et søgetræ, derimod er det hob-ordnet.

I T_4 er der en rød knude, som har et rødt barn. □

Spørgsmål b:

Vi får kun brug for omfarvninger, ingen rotationer:





$\square$

Opgave 2 (15%)

Spørgsmål a:

Basis: $a = 1$
$ab = 1 \cdot b = b$, og algoritmen returnerer netop b.

Induktionsskridt: $a \geq 2$
Iflg. induktionsantagelsen returnerer $\textsc{Mult}\left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor, 2b\right)$ produktet $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \cdot 2b$.

a lige: $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \cdot 2b + b \cdot (a \bmod 2) = \frac{a}{2} \cdot 2b + b \cdot 0 = ab$

a ulige: $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \cdot 2b + b \cdot (a \bmod 2) = \frac{a-1}{2} \cdot 2b + b \cdot 1 = ab - b + b = ab$ $\square$

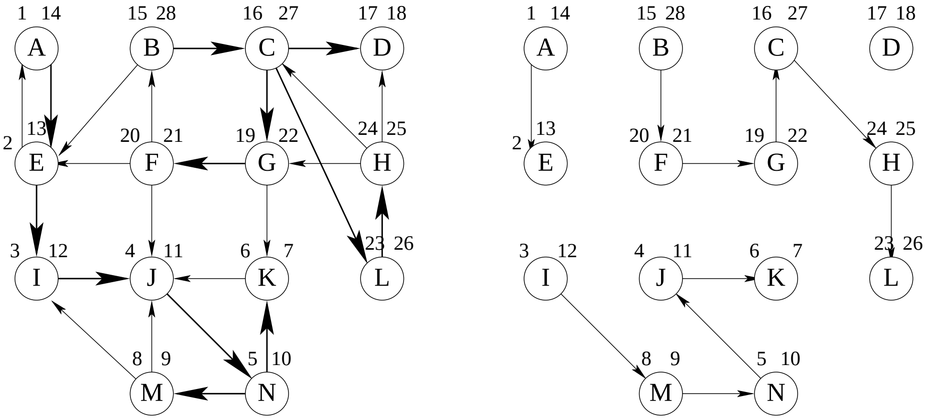
Spørgsmål b:

$$T(a) = \begin{cases} \Theta(1), & a = 1 \\ T(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor) + \Theta(1), & a \geq 2 \end{cases}$$

Master-sætningen, tilfælde 2 giver $T(a) \in \Theta(\log a)$. $\square$

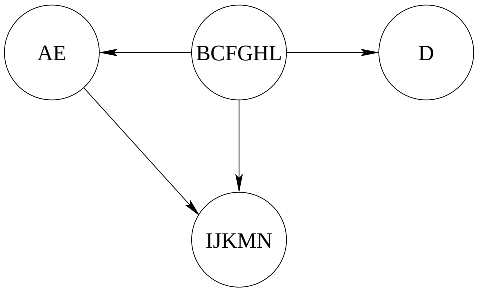
Opgave 3 (25%)

Spørgsmål a:



□

Spørgsmål b:



□

Spørgsmål c: Knuderne BCFGHL, AE og IJKLMN skal optræde i denne indbyrdes rækkefølge. Knuden D skal blot optræde efter BCFGHL — dvs. der er følgende tre mulige sorteringer:
BCFGHL, D, AE, IJKLMN
BCFGHL, AE, D, IJKLMN
BCFGHL, AE, IJKLMN, D

□

Opgave 4 (25%)

Spørgsmål a:

		j						
		0	1	2	3	4	5	6
i	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	1	1
	3	0	0	1	1	1	1	1
	4	0	0	1	1	1	1	1
	5	0	0	1	1	1	1	2

$\square$

Spørgsmål b: Hvis den ene streng er tom, har længste fælles delsekvens længde 0, og dermed er blokscoren 0.

Hvis $s_i \neq t_j$, må det sidste tegn i en fælles delsekvens for S_i og T_j være forskellig fra mindst en af s_i og t_j. D.v.s. vi kan se bort fra en af dem.

Hvis $s_i = t_j$, findes der en fælles delsekvens for S_i og T_j, som slutter med s_i. Det er dog ikke sikkert, at det giver den størst mulige blokscore at inkludere s_i i løsningen, men hvis s_i skal med, så skal det længste suffix af S_i, som også er et suffix af T_j med. Vi beregner den bedst mulige blokscore for både denne mulighed og de to muligheder, hvor vi udelukker enten s_i eller t_j fra løsningen — og vælger den bedste af de tre muligheder. På den måde får vi undersøgt alle muligheder. Hvis vi vælger muligheden, hvor s_i skal med i delsekvensen, tilføjer vi m_{ij} tegn til delsekvensen (derfor $+m_{ij}$), men vi tilføjer også en ny blok (derfor -1). $\square$

Spørgsmål c: Man kan lave en rekursiv eller en iterativ algoritme. Vælger man en iterativ løsning, kunne det se sådan ud:

```
MaxBlokscore(S,T)
for i ← 0 til |S|
    B(i,0) ← 0
for j ← 1 til |T|
    B(0,j) ← 0
for i ← 0 til |S|
    for j ← 0 til |T|
        M(i,j) ← 0
for i ← 1 til |S|
    for j ← 1 til |T|
        B(i,j) ← max{B(i,j−1), B(i−1,j)}
        Hvis S[i] = T[j]
            M(i,j) ← M(i−1,j−1) + 1
            B(i,j) ← max{B(i,j), B(i−M(i,j), j−M(i,j)) + M(i,j) − 1}
returner B(|S|,|T|)
```

Lad $m = |S|$ og $n = |T|$. Ved at bruge tabellen M opnår vi en køretid på $\Theta(mn)$. Hvis man i stedet beregner m_{ij} fra bunden, hver gang man har brug for den, får man en worst-case køretid på $\Theta(mn\min(m,n))$. $\square$

Opgave 5 (20%)

Spørgsmål a: Man indsætter tallene et for et i et rød-sort træ. I hver knude i træet har man en tæller, som fortæller, hvor mange gange knudens element er fundet i input. På den måde kan man nøjes med $O(\log n)$ knuder.

Når man skal indsætte et tal, checker man først, om der allerede er en knude med det tal. Hvis ja, inkrementerer man blot tælleren i den knude. Hvis nej, opretter man en knude med dette tal og en tæller, som man sætter lig 1.

Da et rød-sort træs højde er logaritmisk i antallet af knuder, giver det en højde på $O(\log(\log n))$. D.v.s. de n indsættelser tager sammenlagt $O(n \log(\log n))$ tid.

Derefter laver man blot et inorder-gennemløb af træet og udskriver tallene, efterhånden som man møder dem. I hver knude aflæser man tælleren for at vide, hvor mange gange tallet i knuden skal udskrives, inden man går videre til næste knude. Et inorder-gennemløb tager tid $\Theta(V)$, hvor V er antallet af knuder i træet, plus den tid, der bruges i knuderne. Da der skal udskrives n tal, bruges der sammenlagt $\Theta(n)$ tid i knuderne. Da $V \in O(\log n)$ bruges der alt i alt $\Theta(n)$ tid på at udskrive tallene. $\square$