

Sidste gang: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$



Sandhedstabeller

- for operatørene og for udsagn med flere op.

$p \oplus q$: eksklusiv eller, exclusive or, XOR

enten p eller q

p og q er forskellige

(dvs $p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$)

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Akivalenser (Afsnit 1.3)

Læs Tabel 6 og 7 er vigtige (s. 25-26)

Gennemgår ikke dem alle, men læs dem selv, og slå op!

" $\equiv$ " kan læses som " $\Leftrightarrow$ "

Tabel 7, linie 1:

$$p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee q$$

Argument:

(1) Hvis p er sand, skal q også være det

(2) ——— " ——— falsk, kan q være sand eller falsk.

Sandhedstabel:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	S
F	F	S	S

(1) }
(2) }

Tabel 7, linie 2:

$$p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg q \Rightarrow \neg p$$



p medfører q /
hvis p er sand,
er q også sand



p , kun hvis q /
hvis q er falsk,
er p også falsk

Opg. 20 s. 22 (afsnit 12)

5 venner har adgang til et chatrum

- (1) Kevin eller Heather eller begge chatter $K \vee H$
- (2) Enten Randy eller Vijay chatter $R \oplus V$
- (3) Hvis Abby chatter, chatter Randy også $A \Rightarrow R$
- (4) Enten chatter både Vijay og Kevin eller ingen af dem $V \Leftrightarrow K$
- (5) Hvis Heather chatter, chatter Abby og Kevin også. $H \Rightarrow A \wedge K$

Hvem chatter?

Lad K være udsagnet "Kevin chatter".

H Heather
 R Randy
 V Vijay
 A Abby

Chatter Kevin?

$$\neg K \stackrel{(1)}{\Rightarrow} H \stackrel{(5)}{\Rightarrow} A \wedge K \Rightarrow K \quad \downarrow$$

D.v.s. K

$$\begin{aligned} K &\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \underline{V} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \underline{\neg R} \stackrel{(3) \text{ og Tabel 7, linie 2'}}{\Rightarrow} \underline{\neg A} \\ &\Rightarrow \neg(A \wedge K) \stackrel{(5) \text{ og Tabel 7, linie 2'}}{\Rightarrow} \underline{\neg H} \end{aligned}$$

D.v.s. Kevin og Vijay chatter.

Her hjalp det at tænke logisk og struktureret
og at udtrykke sig kort og præcist (det gav overblik).

Tabel 6:

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive love: (lidt som at gøre ind i parentes)

$$(1) p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(2) p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Bevis to go to!

Bevis:

(1) p sand: begge udtryk sande

p falsk: sande, hvis $q \wedge r$

(2) p sand: sande, hvis $q \vee r$

p falsk: falske

p	q	r
S		S
S		S
S		S
S	S	S
F	S	S
F		S
F		S
F		S
F		S
S		S
S		S
S		S
S	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

De Morgans Love:

$$(1) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Bevis: opgave til næste uge

Bevis: Tabel 3, s. 24

Lidt mere terminologi: (Def. 1.3.1, s. 23)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**,
uanset sandhedsværdier af de udsagn,
som indgår.

Eks: $p \vee \neg p$
 $p \Rightarrow p$
 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (og alle de andre
øker. i afsnit 1.3)

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**,
(contradiction) uanset s.v. af de udsagn, der indgår.

Eks: $p \wedge \neg p$
 $p \Leftrightarrow \neg p$ (men ikke $p \Rightarrow \neg p$)
 $p \oplus p$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi
eller en modstrid.

Eks: $p \vee q$
 $p \Rightarrow q$

Kvantorer (afsnit 1.4)

Er $x < 2x$?

Lad $P(x)$ være udsagnet $x < 2x$

$P(x)$ er et åbent udsagn

x er en fri variabel

" $< 2x$ " er et prædikat

$P(0)$ er falsk

$P(1)$ er sand

$P(-1)$ er falsk

$P(x)$ er sand, hvis $x > 0$. D.v.s.

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge \dots$

$1 < 2 \cdot 1 \wedge 2 < 2 \cdot 2 \wedge 3 < 2 \cdot 3 \wedge 4 < 2 \cdot 4 \wedge \dots$

$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x$ S

↑ "For alle"

↑ "gælder"
(udelades nogle gange)

↑ universet

udsagn (d.v.s. har en sandhedsværdi)

x er en bunden variabel

$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : P(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : x < 2x$ S

$\forall x \in \mathbb{Z} : x < 2x$ F

Eks : $x = -1$

$-1 > 2 \cdot (-1)$

Lad $Q(x)$ være udsagnet $x+3 \leq 2x$

$Q(1)$ er *falsk*

$Q(2)$ er *falsk*

$Q(3)$ er *sand*

$Q(4)$ er *sand*

$\vdots$

$\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$ *F*

$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 3 : x+3 \leq 2x$ *S*

$\Updownarrow$
indskrænkning af
universet

$\forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : x+3 \leq 2x$

$\Updownarrow$
 $\forall x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)$

$0+3 \leq 2 \cdot 0 \quad \vee \quad 1+3 \leq 2 \cdot 1 \quad \vee \quad 2+3 \leq 2 \cdot 2 \quad \vee \quad 3+3 \leq 2 \cdot 3 \quad \vee \dots$

$\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$

universet (pointing to $\mathbb{N}$)

bunden variabel (pointing to x)

udsagn (pointing to $x+3 \leq 2x$)

"Der eksisterer" (pointing to $\exists$)

"sådan at" (udelades nogle gange)" (pointing to $:$)

S eks: $x=4$

$4+3 \leq 2 \cdot 4$