

Sidste gang: Kvantorer: $\forall \exists$

① Eks:

$$\begin{aligned} & 1 < 2 \cdot 1 \quad \wedge \quad 2 < 2 \cdot 2 \quad \wedge \quad 3 < 2 \cdot 3 \quad \wedge \quad 4 < 2 \cdot 4 \quad \wedge \quad \dots \\ \Updownarrow & \\ & \forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x \end{aligned}$$

↑ "for alle" ↑ "gælder" (kan udelæses)
universet

Eks:

S : mængden af studerende i dette lokale

$P(x)$: x følger DM535

$$\forall x \in S : P(x)$$

② Eks:

$$0+3 \leq 2 \cdot 0 \quad \vee \quad 1+3 \leq 2 \cdot 1 \quad \vee \quad 2+3 \leq 2 \cdot 2 \quad \vee \quad 3+3 \leq 2 \cdot 3 \quad \vee \quad \dots$$

$$\begin{aligned} & \exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x \end{aligned}$$

↑ "Der eksisterer" ↑ "universet" ↑ "sådan at" (udelæses nogle gange)
bundet variabel udsagn

S eks: $x=4$
 $4+3 \leq 2 \cdot 4$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 10 : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 : x+3 \leq 2x \quad F, \quad \text{da } x+3 \leq 2x \Leftrightarrow 3 \leq x$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 3 : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\text{eks: } x=3$$

Dette kan skrives mere præcist:

$$\underbrace{\exists!}_{\uparrow} x \in \mathbb{Z}, x \leq 3 : x+3 \leq 2x \quad S$$

↑
"der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad F$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x=0 \quad S$$

$\exists$ og $\forall$ er kvantorer

Kvantorerer har højere præcedens end de logiske operatorer

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

D.v.s.

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \vee x \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3) \vee x \geq 4$$

$$\nrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : (x \leq 3 \vee x \geq 4)$$

Hvordan negter man kvantificerede udsagn?

De Morgans Love for kvantorer:

$$\neg (\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg (\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

$$\text{Eks: } \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x})^F \Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x \quad S$$

$$\neg(\exists x \in \mathbb{N} : 2^x < x) \Leftrightarrow \\ \forall x \in \mathbb{N} : 2^x \geq x \quad S$$

$$\neg(\forall x \in \mathbb{N} : (x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x)) \Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x) \Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{N} : (x+3 > 2x \wedge 2^x \geq 2x) \quad S \quad \text{eks: } x=1$$

$$\neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)})^S \quad \begin{array}{l} \text{De Morgan} \\ (\Rightarrow) \\ \text{Tabel 7} \\ (\Leftrightarrow) \\ \text{De Morgan} \end{array} \\ \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x) \\ \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x < 3 \vee x+3 \leq 2x) \\ \exists x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \wedge x+3 > 2x) \quad F$$

Indledende kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

Lad $P(x,y)$ være udsagnet $x+y=0$

$P(2,3)$ er **falsk**

$P(2,-2)$ er **sand**

($\forall$)

$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y=0$ **S**

Kan læses som:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$ gælder:

Der eksisterer et $y \in \mathbb{Z}$, så: **S** "Eks": $y=-x$
 $x+y=0$

P: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x+y=0$ **S**

Har kvantorenes orden betydning?

Q: $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y=0$

Der eksisterer et $y \in \mathbb{Z}$, så:

For alle $x \in \mathbb{Z}$ gælder:

$$x+y=0$$

F: for hvert y er der præcis ét x , så $x+y=0$

f. eks.

$y=1$: kun $x=-1$ opfylder $x+y=0$

$y=2$

-2

$\vdots$

D.v.s. vi får et andet udtryk ved at ændre kvantorenes rækkefølge

Q er stærkere end P, d.v.s. $Q \Rightarrow P$ med $P \not\Rightarrow Q$

| P kan man vælge et nyt y for hvert x .

| Q skal der være et y , der "virker" for alle x .

Eks:

S : Mgd. af stud. i dette lokale

H : Mgd. af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$$\forall x \in S: \exists y \in H: P(x,y)$$

Eks:

Lad $L = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$$\forall x \in L: \exists y \in \mathbb{N}: x = 2y$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y)$$

$\Updownarrow$

$$\forall y \in \mathbb{Z}: \forall x \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y)$$

$\Updownarrow$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y)$$

$\uparrow$ "går op i"

Når kvantoren er
ers, må man gøre
ændre rækkefølgen.

Hv skal udtrykket f.eks.
gælde for alle par
 $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y < 10$$

$\Updownarrow$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}: x + y < 10$$

S Eks: $x=1, y=1$

(Læs Tabel 1, s. 56)

Eks:

$\forall \exists \forall$ $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z$

For alle $x \in \mathbb{Z}$ gjelder

Der findes et $y \in \mathbb{Z}$, så

For alle $z \in \mathbb{Z}^+$ gjelder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

S

Eks: $y = x$

$$\frac{x}{x} = 1 \leq z$$

Negering af indlydende kvantorer:

$$\neg (\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \neg (\exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0$$