

Induktion:

Bruges til at bevise parametriserede udsagn.

Eks: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

D.v.s. $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

$P(0): 2^0 = 2^1 - 1$

$P(1): 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$

$P(2): 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1$

$\vdots$

$n=0: 2^0 = 1$

$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$

} Basistilfælde

$n=1: 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$

$2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark$

$n=2: 2^0 + 2^1 + 2^2 = 3 + 2^2 = 7$

$2^{2+1} - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \checkmark$

$n=3: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 7 + 8 = 15$

$2^{3+1} - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \checkmark$

Kunne også gøre sådan:

$n=0: 2^0 = 1 = 2^1 - 1$

$P(0)$

$n=1: 2^0 + 2^1 = 2^1 - 1 + 2^1 = 2 \cdot 2^1 - 1 = 2^2 - 1$

$P(1)$

$n=2: 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^2 - 1 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 2^3 - 1$

$P(2)$

$n=3: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3 = 2^4 - 1$

$P(3)$

Vi har vist:

- $P(0)$
- $P(1) \Rightarrow P(2)$
- $P(2) \Rightarrow P(3)$
- $P(3) \Rightarrow P(4)$

På samme måde kunne vi vise

$$P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(5) \Rightarrow P(6)$$

$\vdots$

Men vi bliver aldrig færdige...

Vis i stedet

$$P(n-1) \Rightarrow P(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} &= 2^n - 1 \Rightarrow \\ 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} &= 2^n - 1 \Rightarrow \\ 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}} \right\} \text{Induktionsskridt}$$

Induktionsbeviser:

Lad $I = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$

Bevis $P(n)$ for alle $n \in I$ o.h.a. (simpel) induktion:

- Bevis $P(k)$ (Basistilfælde)
- Bevis $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $n \in I$, (Induktionsskridt)

eller $\underbrace{P(n-1) \Rightarrow P(n)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \in I - \{k\}$

Induktionsantagelse

Eks: $2^n < n!$ for $n \geq 4$

Bevis: Ved induktion over n

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse:

$$2^{n-1} < (n-1)!$$

Ind. skridt:

$$\hat{=} 2^{n-1} < (n-1)! \quad (\text{ind. ant.})$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot (n-1)!$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{n-1} < n \cdot (n-1)!, \quad \text{da } n > 2$$

$$\hat{=} 2^n < n!$$

□

Vi viste

- $P(4)$
- $P(4) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$

Ligesom at vælte domino-brikker:

- I basis-tilfældet viser vi, at den første brik kan væltes.
- I ind. skridtet viser vi, at afstanden ml. brikkerne er så lille, at vælter en brik, vælter den næste også.

Eks: En mængde med n elementer har 2^n delmængder.

Basis: Ved induktion over n

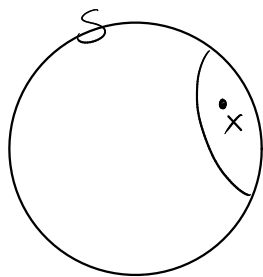
Basis: $n=0$

Den tomme mængde har én delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

Ind. skridt:



$$|S| = n$$

x : vilkårligt element i S

$$S' = S - \{x\}, \text{ dvs. } |S'| = n-1.$$

Iflg. ind. ant. har S' 2^{n-1} delmængder

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$ (2^{n-1} muligheder iflg. ind. ant.)
- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$ (2^{n-1} muligheder iflg. ind. ant.)

$$\text{I alt } 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n \text{ muligheder}$$

□

Påstand: Alle æbler har samme farve

Ben's: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.:

I enhver skål med $n-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $n \geq 3$

Stil æblerne op på række:



De første $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

De sidste $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $n-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle n æbler samme farve. □

Vi har vist

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$

Stærk induktion:

$$I = \{k, k+1, \dots\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

- Basis $P(k), P(k+1), \dots, P(l), \quad l \geq k$
- Basis $P(k) \wedge P(k+1) \wedge \dots \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n),$
for alle $n \in I - \{k, k+1, \dots, l\}$

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller
D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$I = \{4, 5, 6, \dots\}$$

Basis:

Basis:

$$n=4 : 4 = 2 \cdot 2 \quad (a=2, b=0)$$

$$n=5 : 5 = 5 \cdot 1 \quad (a=0, b=1)$$

Ind. ant:

$$\exists a, b \in \mathbb{N} : n-2 = 2a + 5b$$

$$\exists a, b \in \mathbb{N} : n-1 = 2a + 5b$$

Ind. skridt:

$$n = n-2 + 2$$

$$= 2a + 5b + 2, \quad \text{hvor } a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$



Hvorfør havde vi brug for to værdier af n i basistilfældet? Vi brugte jo kun én værdi af n i induktionsskridtet.

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow \dots$$

Udsagnet kan også vises ved simpel induktion, men induktionsskridtet bliver lidt længere:

Basis: $n=4$

Ind. ant.: $\exists a, b \in \mathbb{N} : n-1 = 2a+5b$

Ind. skridt: $n \geq 5$

$$n = n-1+1 = 2a+5b+1, \quad \text{ifly. ind. ant.}$$

Vi deler brøket op i to tilfælde:

$a \geq 2$:

$$n = \underbrace{2(a-2)}_{\geq 0} + 4 + 5b + 1 = \underbrace{2(a-2)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5(b+1)}_{\in \mathbb{N}}$$

$a \leq 1$.

I dette tilfælde er $b \geq 1$, da $n > 2$.

$$n = 2a + \underbrace{5(b-1)}_{\geq 0} + 5 + 1 = \underbrace{2(a+3)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5(b-1)}_{\in \mathbb{N}}$$

□

Prove selv at bevis, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{O.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsantagelse:

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsskridt:

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$\Downarrow$

$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

□